ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

PUBLIÉES AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TOME IX

Année 1959

RÉDACTEURS
M. BRELOT, C. CHABAUTY et L. NÉEL

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1959

SOMMAIRE

(La reproduction des résumés ci-après, rédigés par les auteurs eux-mêmes est autorisée.)

Pages

On établit une condition suffisante pour qu'un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiable sur un ouvert de R^n y soit hypoelliptique. La démonstration, exposée au chapitre III, utilise divers espaces fonctionnels, qui sont étudiés au chapitre I. On prouve que ce critère implique celui de MM. Hörmander et Malgrange, qui affirme l'hypoellipticité des opérateurs formellement hypoelliptiques. Considérons un opérateur différentiel sur R^n_x, $P(\nu, D_x)$, dont les coefficients sont constants par rapport à x, mais sont des fonctions C^∞ du point ν d'un ouvert Ω de R^n. L'opérateur à coefficients variables associé, $P(x, D)$, est dit formellement hypoelliptique dans Ω si $P(\nu, D)$ est hypoelliptique pour chaque ν et si, pour deux points ν_1, ν_2 quelconques de Ω, $P(\nu_1, D)$ et $P(\nu_2, D)$ sont équivalents au sens d'Hörmander. Que notre critère soit plus fort que celui d'Hörmander et Malgrange provient essentiellement du fait, établi dans le chapitre II, que sous les conditions ci-dessus, il existe une fonction $C^\infty E(\nu)$ de ν, à valeurs dans l'espace des opérateurs continus de L^2_c dans L^2_{loc}, qui, pour chaque ν, constitue un inverse de $P(\nu, D)$. Dans la seconde partie du chapitre II, nous prouvons une réciproque de ce résultat. Enfin, nous exhibons l'exemple d'un opérateur différentiel qui satisfait notre critère, et qui est donc hypoelliptique, mais qu'aucun changement de coordonnées ne peut ramener au type formellement hypoelliptique.

On démontre que les notions d'ensemble $\mathcal{K}$-analytique et $\mathcal{K}$-souslinien sont essentiellement équivalentes; puisque dans le cas métrique, l'analyticité classique équivaut à la $\mathcal{K}$-analyticité.

Grâce à la notion d'opération (A) on énonce, sous une forme ne supposant aucune notion topologique, un théorème de capacitabilité qui redonne, dans le cas d'un espace topologique, les résultats connus pour les ensembles analytiques. En outre, une analyse de la démonstration fournit, sous des hypothèses beaucoup plus larges, la capacitabilité de certains ensembles boréliens.

On montre que pour tout ensemble X d'un espace de Green, l'ensemble des points où X est effilé peut être enfermé dans un ouvert ω tel que $f(\omega \cap X) < \varepsilon$, ($f$ désignant la capacité). On applique ensuite diversement ce résultat : Par exemple, pour tout X, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (X_n) de X telle que $\Sigma f(\overline{X}_n) < f(X) + \varepsilon$.

On démontre, pour le noyau newtonien, et d'autres noyaux analogues, que pour tout G_δ de capacité extérieure nulle il existe une mesure positive portée par ce G_δ, et telle que l'ensemble des infinis de son potentiel soit identique au G_δ donné.

Les *structures tangentielles* sont une généralisation des *structures homologiques* de l'auteur (telles que structure de Čech, de Sitnikov, etc.). Voir des exemples : les variétés de dimension $\geq r$ différentiablement plongées dans R^n, les polyèdres de dimension $\geq r$ (rectangulaires), dans R^n les sous-espaces de dimension $\geq r$ de R^n (notés respectivement : M_r, P_r, D_r).

On cherche des relations purement algébriques entre les structures tangentielles.

Il existe une théorie de dualité pour les structures tangentielles : A toute structure tangentielle P est associé une structure tangentielle $\tilde{P}$, telle que l'on ait :

$$\tilde{\tilde{P}} = P.$$

Notre but est d'exprimer les structures tangentielles plus compliquées au moyen de structures tangentielles plus simples (au point de vue algébrique).

Pour une structure tangentielle donnée P nous construirons deux nouvelles structures tangentielles : l'extension projective de P : P^p et l'extension injective de P : P^i.

On a obtenu les théorèmes suivants :

$$\widetilde{P^i} = \tilde{P}^p.$$
$$\widetilde{P^p} = \tilde{P}^i.$$

Pour les exemples donnés plus haut on a les relations

$$M_r = P_r^p$$
$$D_r = P_r^i.$$

Des liens entre les structures différentiables et les ensembles de dimension $\geq r$ seront exposés dans un article ultérieur.

La première partie est l'étude sur une variété riemanienne $\mathfrak{V}$ de transformations locales déduites du groupe d'holonomie infinitésimale, opérant sur les géodésiques issues d'un point. Si ces transformations sont affines,

projectives ou conformes, ou bien conservent l'élément de volume, ou encore la structure complexe dans le cas kahlerien; on en déduit des conditions pour que $\mathfrak{V}$ soit localement symétrique (ou pour que son tenseur de Ricci soit à dérivée covariante nulle). L'étude est ensuite étendue à certaines variétés à connexion euclidienne. La deuxième partie est consacrée aux transformations infinitésimales projectives ou conformes. Dans le chapitre I, $\mathfrak{V}$ est supposée compacte ou complète. Le chapitre II est réservé aux champs de tenseurs G-invariants sur un espace homogène G/H. Au chapitre III, $\mathfrak{V}$ est espace d'Einstein, on a alors un théorème de décomposition de l'espace vectoriel des l-formes projectives (resp. conformes); application, en particulier au cas d'un espace d'Einstein compact ou complet. Le chapitre IV concerne le cas où V est kählerienne : toute l-forme projective (resp. conforme) fermée est affine (resp. homothétique); si on ajoute l'hypothèse compact on a des formes à dérivée covariante nulle. Sur un espace d'Einstein-Kähler à courbure scalaire non nulle toute I forme projective ou conforme est isométrique.

Après une étude des appuis des cônes convexes et de certains ensembles de formes linéaires continues dans un espace vectoriel topologique, les pyramides convexes sont caractérisées par la propriété suivante : ce sont des cônes convexes en chaque point desquels le cône d'appui est fermé. Ceci permet de définir et d'étudier les pyramides convexes dans un espace vectoriel de dimension infinie muni de la topologie fine; tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un sous-espace d'appui extrême de dimension infinie, mais une pyramide convexe peut ne pas avoir d'hyperplan d'appui extrême ni d'arêtes et son polaire peut ne pas être une pyramide convexe; les pyramides propres sont intersection de leurs appuis extrêmes; le polaire d'une pyramide stricte est une pyramide convexe. Dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'une pyramide convexe sera appelée pyramide topologique; l'étude des pyramides simpliciales topologiques, qui sont adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de leurs arêtes, conduit à certains résultats d'analyse.

L'A. démontre en s'appuyant sur la thèse de M[lle] Naïm le résultat suivant qu'il avait établi grâce aux probabilités : dans un espace de Green, si u et h sont surharmoniques > 0, u/h admet en tout point de l'espace ou de sa frontière de Martin une « limite fine » finie, sauf sur un ensemble de mesure nulle pour la mesure associée canoniquement à h. Puis il peut même affaiblir l'hypothèse $u > 0$.

Dans un espace de Green, on montre que, pour toute fonction B. D. L. c'est-à-dire du type de Beppo-Levi-Deny) et « presque toute » ligne de Green régulière issue d'un point, la variation totale de la fonction est finie, ce qui entraîne l'existence d'une limite finie le long de la ligne.

Ce résultat, qui précise celui d'existence d'une « radiale » (selon M. Brelot), généralise un résultat de Beurling sur les limites radiales dans le cercle (la raréfaction des rayons exceptionnels correspond alors à une capacité nulle).

Soit X un compact, B un espace vectoriel de fonctions numériques continues sur X (muni de la norme classique), séparant les points de X et contenant les constantes.

On note M(B) l'ensemble des x de X tels que toute mesure positive μ sur X pour laquelle on ait pour toute $f \in B$:

$$f(x) = \int f \, d\mu.$$

soit nécessairement la mesure de masse 1 portée par x.

On veut représenter les éléments de B^* par des mesures portées par M(B); un théorème de Choquet en montre la possibilité lorsque X est métrisable. On le démontre ici autrement, ce qui redonne le théorème de Choquet, et permet d'étendre ce dernier au cas non métrique (dans ce cas on exige seulement de μ qu'elle soit portée par tout ouvert contenant M(B)).

On énonce également des résultats voisins pour des algèbres de fonctions continues à valeurs complexes.

Une série d'exemples montre qu'on ne peut pas améliorer les énoncés obtenus, par exemple imposer à μ d'être portée par M(B) lui-même dans tous les cas.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HYPOELLIPTIQUES

par François TRÈVES

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

On dit qu'un opérateur différentiel [1] P, défini sur une variété indéfiniment différentiable V, est *hypoelliptique* (dans V) si toute distribution T sur V est une fonction indéfiniment différentiable dans tout ouvert de V où il en est ainsi de PT. Dans le chapitre III du présent article se trouvent énoncés et démontrées des conditions suffisantes d'hypoellipticité.

Jusqu'à une date récente, les démonstrations d'hypoellipticité étaient limitées aux catégories classiques : preuves de la « régularité à l'intérieur » des solutions, « faibles » ou « fortes », des équations elliptiques ou paraboliques [2]. Mais la très belle caractérisation, par M. L. Hörmander, des opérateurs différentiels hypoelliptiques à coefficients constants dans R^n, a conduit naturellement à envisager la possibilité de résultats généraux. Guidés par ce genre de préoccupation, MM. Hörmander et Malgrange ont démontré, à l'aide de méthodes différentes, le même critère d'hypoellipticité. Les conditions suffisantes qu'ils établissent [3] englobent le cas elliptique, le cas p-parabolique (au sens de Pétrowski) et celui des opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants. Y échappent certains systèmes différentiels, comme l'a remarqué L. Hörmander [4]. Nous-mêmes exhibons ici (proposition 3. 4) *une* équation hypoelliptique qui ne remplit pas les conditions de

(1) Par opérateur différentiel sur la variété V, il faut entendre ici une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{D}(V)$ des fonctions C^∞ dans V, à support compact, dans lui-même [$\mathcal{D}(V)$ est muni de la topologie de Schwartz], application qui diminue le support; cette définition correspond au fait que P est à coefficients indéfiniment différentiables dans tout système de coordonnées locales.

(2) En ce qui concerne la régularité à l'intérieur des solutions faibles, dans le cas elliptique ou parabolique, on pourra consulter Lax [1], Mizohata ([1], [2]), Schwartz ([6], [7]).

(3) M. F. E. Browder a démontré, dans Browder [1], des conditions suffisantes plus restrictives.

(4) Ces systèmes ont été exhibés par A. Douglis et L. Nirenberg (*Comm. pures and appl. Math.*, t. 8, 1955, p. 503).

Hörmander et Malgrange, et qu'aucun changement de coordonnées ne peut amener à les remplir.

Comme les travaux précédents, le nôtre a sa source dans la caractérisation des opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants. Pour établir le critère d'hypoellipticité du chapitre III, nous avons adapté la méthode par laquelle M. S. Mizohata a prouvé l'hypoellipticité des opérateurs elliptiques et paraboliques (Mizohata [1], [2]). Cette adaptation entraîne des modifications qui, sans être révolutionnaires, nous ont semblé mériter une publication. Ceci s'ajoute au fait, que le critère d'hypoellipticité que nous obtenons est strictement plus large que celui de Hörmander et Malgrange.

L'un des caractères spécifiques, et sans doute un inconvénient, de la voie que nous avons choisie, réside en l'usage systématique des solutions élémentaires. Cela nous a poussés à étudier les polynômes différentiels $P(\nu, D_x)$ sur R^n, dont les coefficients (constants par rapport à la variable x de R^n) sont des fonctions indéfiniment différentiables du point ν d'une variété V. Cette étude occupe tout le chapitre II. Le résultat principal en a été déjà énoncé, avec une précision moindre, dans Trèves [1] (théorème 2). Nous en publions ici la démonstration complète, qui n'est d'ailleurs que l'adaptation naturelle d'un raisonnement de M. L. Hörmander ([1], preuve du théorème 3. 4). Voici, *grosso modo*, quel est ce résultat. Faisons les hypothèses suivantes :

A) $P(\nu, D)$ est hypoelliptique pour tout $\nu \in V$.

B) Quels que soient les points ν_1 et ν_2 de V, $P(\nu_1, D)$ et $P(\nu_2, D)$ sont équivalents (au sens d'Hörmander ; voir notre déf. 2. 1).

Il existe alors une solution élémentaire $E(x, \nu)$ de $P(\nu, D)$ qui a les propriétés suivantes :

C) Pour toute fonction $\alpha(x)$ indéfiniment dérivable, à support compact contenu dans le complémentaire de l'origine, $\alpha(x)E(x, \nu)$ est une fonction C^∞ de (x, ν) (dans $R^n \times V$).

D) L'opérateur de convolution (en x) $E(x, \nu) *$ est une fonction C^∞ de ν, dans V, à valeurs dans l'espace des applications linéaires continues de L^2_c dans L^2_{loc} (espace muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^2_c).

Par L^2_c nous entendons l'espace des fonctions de carré sommable à support compact ; par L^2_{loc}, l'espace des fonctions localement de carré sommable.

La nouveauté de l'étude du chapitre II réside en ce que le problème de la réciproque du résultat précédent s'y trouve pratiquement résolu. Ce problème peut se concevoir ainsi : en faisant, bien entendu, l'hypothèse que la variété V est connexe, est-ce que les propriétés (C) et (D) entraînent (A) et (B)? Un exemple très simple (un opérateur différentiel du second ordre sur la droite réelle, dépendant d'un paramètre réel) montre qu'il n'en est rien sans hypothèse supplémentaire. Ce même exemple suggère d'ailleurs l'hypothèse convenable, qu'on peut énoncer de la façon suivante : toute combinaison linéaire des coefficients de P(ν, D) ayant un zéro d'ordre infini en un point de V doit être partout nulle dans V. La démonstration du fait que, moyennant cette condition, les deux conjonctions (A) & (B) et (C) & (D) sont équivalentes, occupe presque entièrement la deuxième partie du chapitre II. En dehors de cette condition, tout devient possible, comme on s'en convainc en étudiant l'exemple mentionné, et c'est dans ce sens que notre résultat (théorème 2. 2) constitue un optimum.

L'auteur tient à remercier MM. HORMANDER, MALGRANGE, MIZOHATA et SCHWARTZ pour les enseignements qu'il a pu tirer de leurs travaux et de leur conversation.

NOTATIONS

Les opérateurs différentiels, les fonctions, les distributions, etc., seront définis dans R^n, dont la variable sera le plus souvent notée $x = (x_1, ..., x_n)$. La transformée de Fourier sera supposée opérer ainsi

$$\hat{f}(y) = \int f(x) \exp\left(-2i\pi \langle x, y\rangle\right) dx$$

par exemple pour $f(x)$ continue à support compact;

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n;$$

x sera systématiquement la variable coté objet, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ la variable coté image; la distance euclidienne dans R^n sera notée $|x|$, $|y|$, etc.

Nous désignerons par N l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, par N^n celui des systèmes $(p_1, \ldots p_n)$ de n tels entiers; N et N^n sont munis de la loi additive usuelle et $p \in N^n$, $p = 0$, signifie

$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$. Comme c'est la coutume, nous écrirons $|p|$ pour $p_1 + \cdots + p_n$, $p!$ pour $p_1! \ldots p_n!$, z^p ($z \in \mathrm{C}^n$) pour $z_1^{p_1} \ldots z_n^{p_n}$, etc.

Un polynôme différentiel P(D) est un opérateur différentiel sur R^n à coefficients constants, obtenu en substituant, dans un polynôme P(X) à n indéterminées $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ et à coefficients complexes, la dérivation $\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ à l'indéterminée X_j pour chaque $j = 1, \ldots, n$. Conformément à cette règle, D^p désignera le monôme de dérivation $\left(\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} \cdots \left(\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}$; et $\mathrm{P}^{(p)}(\mathrm{D})$ sera l'opérateur associé au polynôme

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}_n}\right)^{p_n} \mathrm{P}(\mathrm{X}).$$

En ce qui concerne les espaces de fonctions ou de distributions, nous nous conformerons aux définitions et notations de L. SCHWARTZ. Pour les distributions scalaires (voir SCHWARTZ [1]), bornons-nous à signaler que si Ω est une variété C^∞, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω, à support compact, $\mathcal{E}(\Omega)$ celui des fonctions indéfiniment différentiables à support quelconque, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions (ou, si l'on préfère, des courants de degré 0) sur Ω, $\mathcal{E}'(\Omega)$ celui des distributions sur Ω à support compact. Nous ne mentionnerons pas Ω lorsque $\Omega = \mathrm{R}^n$; ainsi $\mathcal{S}$ sera l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans R^n, à décroissance rapide à l'infini, $\mathcal{S}'$, celui des distributions tempérées sur R^n. Tous ces espaces seront munis des topologies que leur a assignées Schwartz.

Une remarque en passant : on sait que la transformation de Fourier définit un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{S}'_x$ sur $\mathcal{S}'_y$; l'image de $\mathrm{T}(x) \in \mathcal{S}'_x$ par cet isomorphisme sera notée $\hat{\mathrm{T}}(y)$.

Nous utiliserons la notation fonctionnelle pour les distributions (⁵) : nous écrirons par exemple $\mathrm{T}(x) \in \mathcal{D}'_x$ et la dualité entre $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}'_x$ sera exprimée par l' « intégrale » $\int \mathrm{T}(x)\,\varphi(x)\,dx$ ($\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$).

(⁵) Exception faite parfois de la mesure de Dirac à l'origine, qui sera tantôt notée δ_x, tantôt $\delta(x)$, et quelques fois δ tout court.

Nous ferons intervenir aussi des fonctions et des distributions à valeurs vectorielles, c'est-à-dire à valeurs dans un espace vectoriel topologique. Sur ce sujet, le lecteur pourra se reporter à Schwartz [3] et [4] (ou à Schwartz [2]). Si E est un espace vectoriel topologique et $\mathcal{K}(\Omega)$ un espace de fonctions ou de distributions dans la variété Ω, on peut, dans certains cas, définir un espace $(\mathcal{H}(\Omega))(E)$ de fonctions ou de distributions à valeurs dans E qui soit la généralisation du cas scalaire $\mathcal{H}(\Omega)$. Par exemple, $(\mathcal{E}(\Omega))(E)$ désignera l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω, à valeurs dans E; $(\mathcal{D}'(\Omega))(E)$ sera (par définition) l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E (pour ceci, on suppose que E est localement convexe séparé quasi-complet), etc...

Nous utiliserons souvent la notation suivante : si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, $L_b(E; F)$ désignera l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de F.

CHAPITRE I

DE CERTAINS ESPACES FONCTIONNELS

§ 1. — Espaces A^s, A^s_c, A^s_{loc}.

DÉFINITION 1. 1. — *Soit s un nombre réel quelconque. Nous désignerons par A^s l'espace des distributions tempérées $T(x)$ sur R^n, dont la transformée de Fourier $\hat{T}(y)$ est une fonction telle que $(1+|y|^2)^{s/2}\,\hat{T}(y) \in L^\infty_y$.*

Nous munirons A^s de la norme $N_s(f) = \|(1+|y|^2)^{s/2}\,\hat{f}(y)\|_{L^\infty}$ qui en fait un espace de Banach (non réflexif !). Si $s' \leqslant s$, on a les plongements continus $\mathcal{S} \subset A^s \subset A^{s'} \subset \mathcal{S}'$; A^s est dense dans $\mathcal{S}'$ mais $\mathcal{S}$ ne l'est pas dans A^s. En particulier, le dual de A^s n'est, pour aucun s, un espace de distributions.

Si $P(D)$ est un polynôme différentiel d'ordre m, $P(D)\delta \in A^{-m}$; en particulier, $\delta \in A^0$.

Soient deux nombres réels s, t; on peut définir la convolution $S * T$ d'un élément S de A^s et d'un élément T de A^t comme étant la transformée de Fourier réciproque du produit $\hat{S}(y)\,\hat{T}(y)$. Le résultat suivant est évident :

PROPOSITION 1. 1. — *$(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $A^s \times A^t$ dans A^{s+t}.*

COROLLAIRE 1. — *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients constants; $f \to P(D)\,f$ est une application linéaire continue de A^s dans A^{s-m}.*

Soient $f \in A^s$, $g \in A^{|s|+n+1}$; posons :

$$\hat{f} * \hat{g}(y) = \int (1+|u|^2)^{s/2}\hat{f}(u)\,(1+|y-u|^2)^{(n+1)/2} \\ (1+|u|^2)^{-s/2}\hat{g}(y-u)\,(1+|y-u|^2)^{-(n+1)/2}\,du,$$

intégrale qui a un sens, car il existe $C_s < +\infty$ tel que, pour tous $u, y \in R^n$,

$$(1 + |u|^2)^{-s/2} \leqslant C_s(1 + |y|^2)^{-s/2}(1 + |y - u|^2)^{|s|/2},$$

d'où résulte aussi :

$$(1 + |y|^2)^{s/2}|\hat{f} * \hat{g}(y)| \leqslant C_s \int (1 + |y - u|^2)^{-(n+1)/2}\, du \times N_s(f) \times N_{|s|+n+1}(g).$$

La transformée de Fourier réciproque de $\hat{f} * \hat{g}(y)$ sera, par définition, le produit multiplicatif fg de f et de g. Nous avons prouvé :

Proposition 1. 2. — *$(f, g) \to fg$ est une application bilinéaire continue de $A^s \times A^{|s|+n+1}$ dans A^s.*

Comme $\mathcal{S}$ est plongé continûment dans $A^{|s|+n+1}$ quel que soit s, on a :

Corollaire 1. — *$(f, \varphi) \to f\varphi$ est une application bilinéaire continue de $A^s \times \mathcal{S}$ dans A^s.*

Définition 1. 2. — *Nous appellerons A^∞ l'intersection de tous les espaces A^s (s parcourant R) et A leur réunion.*

Proposition 1. 3. — *Pour toute $g \in A^\infty$, $f \to gf$ est une application linéaire continue de A^s dans lui-même.*

Notons, avec Schwartz ([1], t. II, p. 55) $\mathcal{D}_{L^p}$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dont toutes les dérivées appartiennent à L^p.

Proposition 1. 4. — $\mathcal{D}_{L^1} \subset A^\infty \subset \mathcal{D}_{L^2}$.

Les inclusions n'ont ici qu'une signification vectorielle, pour la bonne raison que nous n'avons pas défini de topologie sur A^∞.

D'abord, $A^\infty \subset \mathcal{D}_{L^2}$. En effet, les éléments de A^∞ sont manifestement indéfiniment dérivables; d'autre part, A^∞ est stable par dérivation (comme il résulte du corollaire 1 de la proposition 1. 1). Il suffit donc de prouver que $A^\infty \subset L^2$. Mais si $f \in A^\infty$, il est visible que $\hat{f} \in L^2$, d'où le résultat.

Enfin, $\mathcal{D}_{L^1} \subset A^\infty$; car soit $f \in \mathcal{D}_{L^1}$. Quel que soit l'entier $k \geqslant 0$, $\left(1 - \dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f \in L^1$ et donc sa transformée de Fourier, qui est $(1 + |y|^2)^k \hat{f}(y)$, appartient à L^∞, d'où le résultat.

La proposition 1. 1 montre que la convolution définit sur A une structure d'algèbre commutative, avec unité (la mesure de Dirac δ). Le réel s définit une sorte de filtration décroissante sur A (i.e. $A^s \subset A^{s'}$ si $s' \leqslant s$ et $A^s * A^t \subset A^{s+t}$). Pour $k \geqslant 0$, les A^k sont donc des sous-algèbres de A; parmi celles-ci, la seule qui soit unitaire est A^0. L'intersection A^∞ des A^s est un idéal de A.

La proposition 1. 2. montre que la multiplication est une loi de composition partiellement définie sur A; elle est partout définie sur A^∞. Dans A^∞, il n'y a d'élément unité, ni pour la multiplication, ni pour la convolution.

Définition 1. 3. — *Soit* F *un fermé de* R^n. *Nous désignerons par* A^s_F *le sous-espace de* A^s *formé des* f *qui ont leur support dans* F.

A^s_F sera muni de la topologie induite par A^s; A^s_F est un espace de Banach.

Définition 1. 4. — *Nous désignerons par* A^s_c *la limite inductive (au sens vectoriel-topologique) des espaces* A^s_K, K *parcourant la famille de tous les compacts de* R^n.

A^s_c est une limite inductive dénombrable stricte d'espaces de Banach; c'est donc un espace $\mathcal{LF}$ (non réflexif !). Si $s' \leqslant s$, on a les plongements continus : $\mathcal{D} \subset A^s_c \subset A^{s'}_c \subset \mathcal{E}'$.

Proposition 1. 5. — *L'intersection des espaces* A^s_c *est identique à* $\mathcal{D}$; *leur réunion est identique à* $\mathcal{E}'$.

Si f appartient à l'intersection des A^s_c, f est à support compact, et indéfiniment dérivable d'après la proposition 1. 4.

Soit maintenant $T \in \mathcal{E}'$; d'après le théorème XXVI de Schwartz [1], t. I (1re édition, p. 90), il existe r n-uplets $p \in N^n$ et r fonctions continues à support compact g_p tels que $T = \Sigma D^p g_p$. Il suffit de prouver qu'un terme de la forme $D^p g_p$ appartient à la réunion des A^s. Or $g_p \in L^1$, donc $\hat{g}_p(y) \in L^\infty$ et par conséquent, $(1+|y|^2)^{-|p|/2}(2i\pi y)^p \hat{g}_p(y) \in L^\infty$ ce qui prouve que $D^p g_p \in A^{-|p|}$.

Définition 1. 5. — *Nous désignerons par* A^s_{loc} *l'espace vectoriel des distributions* $f(x)$ *sur* R^n *telles que, pour tout* $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha f \in A^s$.

Nous munirons A^s_{loc} de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \to \alpha f$ de A^s_{loc} dans A^s_c (α parcourant $\mathcal{D}$). Alors A^s_{loc} est un espace de Fréchet (non réflexif). Si $s' \leqslant s$, on a les plongements continus : $\mathcal{E} \subset A^s_{loc} \subset A^{s'}_{loc} \subset \mathcal{D}'$; $A^s_c \subset A^s \subset A^s_{loc}$. Les derniers plongements résultent banalement de la proposition 1. 3 et de ce que $\mathcal{D} \subset A^\infty$.

Proposition 1. 6. — *L'intersection des espaces* A^s_{loc} *est identique à* $\mathcal{E}$; *leur réunion est l'espace des distributions d'ordre fini.*

Démonstration aisée à partir de la proposition 1. 5.

Proposition 1. 7. — *Soit* K *un compact de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $A^s_K \times A^t_{loc}$ *dans* A^{s+t}_{loc}.

Si E, F, G sont trois espaces de Fréchet, toute application bilinéaire séparément continue de E $\times$ F dans G est continue (Dieudonné-Schwartz [1], théorème 8). Par conséquent, il nous suffira de prouver que $f * g$ est séparément continue. Mais grâce au théorème du graphe fermé, il suffit même de prouver que si $f \in A^s_c$ et $g \in A^t_{loc}$, alors $f * g \in A^{s+t}_{loc}$. Soit alors $\alpha \in \mathcal{D}$ quelconque, dont nous noterons H le support (K désignant celui de f). Soit $\beta \in \mathcal{D}$, égale à 1 sur H — K; on a :

$$\alpha(f * g) = \alpha[f * (\beta g)] \qquad \text{et} \qquad \beta g \in A^t_c.$$

Comme $f \in A^s_c$, on a bien, d'après la proposition 1. 1, $f * (\beta g) \in A^{s+t}$ d'où le résultat en appliquant la proposition 1. 3.

Corollaire 1. — *Soient* H, K *deux compacts de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $A^s_H \times A^t_K$ *dans* A^{s+t}_{H+K}.

Proposition 1. 8. — $(f, g) \to fg$ *est une application bilinéaire continue de* $A^s_{loc} \times A^{|s|+n+1}_{loc}$ *dans* A^s_{loc}.

Puisque tous les espaces qui interviennent sont des Fréchets, il suffit (cf preuve de la proposition 1. 7) de montrer que $fg \in A^s_{loc}$; mais ceci résulte banalement des définitions et de la proposition 1. 2.

Corollaire 1. — $(\varphi, f) \to \varphi f$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{E} \times A^s_{loc}$ *dans* A^s_{loc}.

En effet, $\mathcal{E}$ est plongé continûment dans $A^{|s|+n+1}_{loc}$.

§ 2. — Espaces $A^{s,d}$, $A_c^{s,d}$, $A_{loc}^{s,d}$.

DÉFINITION 1. 6. — *Nous désignerons par* $A^{s,d}$ (*s*, *d* *nombres réels*) *le sous-espace de* A^s *formé des* f *telles que, pour tout* $p \in N^n$, $x^p f \in A^{s+|p|d}$.

La topologie sur $A^{s,d}$ sera la moins fine de toutes celles rendant continues toutes les applications $f \to x^p f$ de $A^{s,d}$ dans $A^{s+|p|d}$ (p parcourant N^n); $A^{s,d}$ est ainsi un espace de Fréchet.

DÉFINITION 1. 7. — *Soit* F *un fermé de* R^n. *Nous noterons* $A_F^{s,d}$ *le sous-espace de* $A^{s,d}$ *constitué par les* f *qui ont leur support dans* F.

$A_F^{s,d}$ sera muni de la topologie induite par $A^{s,d}$; c'est alors un espace de Fréchet.

DÉFINITION 1. 8. — *Nous désignerons par* $A_c^{s,d}$ *la limite inductive (au sens vectoriel-topologique) des espaces* $A_K^{s,d}$, K *parcourant la famille des compacts de* R^n.

$A_c^{s,d}$ est un espace $\mathfrak{L}\mathfrak{F}$. On a les plongements continus suivants : si $s' \leqslant s$ et $d' \leqslant d$, $\mathfrak{D} \subset A_c^{s,d} \subset A_c^{s',d'} \subset \mathfrak{D}'$.

Il faut bien souligner que $\mathfrak{D}$ n'est pas dense dans $A_c^{s,d}$ et que donc, pour aucun s ni d, le dual de $A_c^{s,d}$ n'est un espace de distributions. Lorsque d reste fixe et que s parcourt la droite réelle, l'intersection des $A_c^{s,d}$ (contenue dans celle des A_c^s) est identique à $\mathfrak{D}$.

DÉFINITION 1. 9. — *Nous désignerons par* $A_{loc}^{s,d}$ *l'espace des distributions* $f(x)$ *sur* R^n *telles que, pour toute* $\alpha \in \mathfrak{D}$, $\alpha f \in A^{s,d}$.

Nous munirons $A_{loc}^{s,d}$ de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \to \alpha f$ de $A_{loc}^{s,d}$ dans $A_c^{s,d}$ ($\alpha \in \mathfrak{D}$); $A_{loc}^{s,d}$ devient alors un espace de Fréchet. On peut aussi définir $A_{loc}^{s,d}$ comme étant le sous-espace de A_{loc}^s formé des f telles que, pour tout $p \in N^n$, $x^p f \in A_{loc}^{s+|p|d}$, sa topologie étant la moins fine de celles qui rendent continues toutes les applications $f \to x^p f$ de $A_{loc}^{s,d}$ dans $A_{loc}^{s+|p|d}$. On a les plongements continus :

$$\mathcal{E} \subset A_{loc}^{s,d} \subset A_{loc}^{s',d'} \subset \mathfrak{D}' \ (s' \leqslant s,\ d' \leqslant d); \quad A_c^{s,d} \subset A^{s,d} \subset A_{loc}^{s,d}.$$

L'intersection des $A_{loc}^{s,d}$ (d fixe, s parcourant R) est identique à $\mathcal{E}$.

Voici maintenant une propriété qui éclaire un peu, du moins dans le cas $d > 0$, la nature des éléments de $A^{s,d}_{\text{loc}}$.

Proposition 1. 9. — *Soient d un nombre > 0, s un réel quelconque. Si $\alpha \in \mathcal{D}$ a son support dans le complémentaire de l'origine, $f \to \alpha f$ est une application linéaire continue de $A^{s,d}_{\text{loc}}$ dans $\mathcal{D}$.*

Soit $f \in A^{s,d}_{\text{loc}}$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, $|x|^{2k} f \in A^{s+2dk}_{\text{loc}}$. Soit alors $\beta \in \mathcal{D}$ ayant son support dans $\complement \{0\}$, égale à $|x|^{-2k}$ sur le support de α. On a $\beta(\alpha|x|^{2k} f) = \alpha f \in A^{s+2dk}$ et comme k est arbitraire, ceci exige $\alpha f \in \mathcal{D}$ (proposition 1. 5). La continuité de l'application $f \to \alpha f$ résulte ensuite, par exemple, du théorème du graphe fermé.

Corollaire 1. — *Les distributions qui appartiennent à $A^{s,d}_{\text{loc}} (d > 0)$ sont indéfiniment dérivables dans le complémentaire de 0.*

Corollaire 2. — *Si K est un compact contenu dans $\complement \{0\}$ et si d est > 0, $A^{s,d}_{K} = \mathcal{D}_K$* (espace des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n, à support contenu dans K).

L'identité, dans ce corollaire, doit s'entendre au sens vectoriel-topologique, puisqu'il s'agit de deux espaces de Fréchet et que la topologie de $\mathcal{D}_K$ est plus fine que celle de $A^{s,d}_K$.

Proposition 1. 10. — *Soient s, t, d, e quatre nombres réels quelconques; $(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $A^{s,d} \times A^{t,e}$ dans $A^{s+t, \inf(d,e)}$.*

Il suffit (cf. preuve de la proposition 1. 7) d'établir que si $f \in A^{s,d}$ et $g \in A^{t,e}$ alors $f * g \in A^{s+t, \inf(d,e)}$. Soit $p \in N^n$; on a :

$$x^p(f * g) = \sum_{q_j \leqslant p_j,\, j=1,\dots,n} \binom{p_1}{q_1} \cdots \binom{p_n}{q_n} (x^q f) * (x^{p-q} g).$$

Or $x^q f \in A^{s+|q|d}$ *et* $x^{p-q} g \in A^{t+|p-q|e}$; d'après la proposition 1. 1, ceci implique $(x^q f) * (x^{p-q} g) \in A^{s+t+|q|d+|p-q|e}$ d'où le résultat puisque $|q| d + |p - q| e \geqslant |p| \inf(d, e)$.

Corollaire 1. — *Soient H, K deux compacts de R^n; $(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $A^{s,d}_H \times A^{t,e}_K$ dans $A^{s+t, \inf(d,e)}_{H+K}$.*

COROLLAIRE 2. — *Soit* K *un compact de* R^n; $(f, g) \to f * g$ *est une application bilinéaire continue de* $A_K^{s,d} \times A_{loc}^{t,e}$ *dans* $A_{loc}^{s+t, \inf(d,e)}$.

Il suffit d'appliquer la proposition 1. 10 en faisant la remarque suivante : si $f \in A_K^{s,d}$, $g \in A_{loc}^{t,e}$ et $\alpha \in \mathcal{D}_H$ (H : compact arbitraire de R^n), alors pour toute fonction $\beta \in \mathcal{D}$, égale à 1 sur H — K, on a : $\alpha[f*(\beta g)] = \alpha(f*g)$.

COROLLAIRE 3. — *Soit* P(D) *un polynôme différentiel sur* R^n, *d'ordre* m; $f \to P(D) f$ *est une application linéaire continue de* $A_{loc}^{s,d}$ *dans* $A_{loc}^{s-m, \inf(d,1)}$.

Il suffit, d'après le corollaire 2, de prouver que $P(D)\, \delta \in A^{-m,1}$. Nous savons déjà que $P(D)\delta \in A^{-m}$. Remarquons alors que $[x_j, P(D)]$ est un polynôme différentiel d'ordre $m - 1$; or $x_j P(D)\delta = [x_j, P(D)]\delta$ qui appartient donc à A^{-m+1}; on conclut en raisonnant par récurrence sur m.

PROPOSITION 1. 11. — $(\alpha, f) \to \alpha f$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{E} \times A_{loc}^{s,d}$ *dans* $A_{loc}^{s,d}$.

Il suffit, ici encore, de montrer que $\alpha f \in A_{loc}^{s,d}$. Or on a, pour chaque $p \in N^n$, $x^p(\alpha f) = \alpha(x^p f)$ et $x^p f \in A_{loc}^{s+|p|d}$; le résultat découle alors du corollaire 1 de la proposition 1. 8.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *sur* R^n, *à coefficients indéfiniment dérivables;* $f \to P(x, D)f$ *est une application linéaire continue de* $A_{loc}^{s,d}$ *dans* $A_{loc}^{s-m, \inf(d,1)}$. *Même énoncé, avec* A_c, (*resp.* A_K, *K compact arbitraire de* R^n) *à la place de* A_{loc}.

Voici une conséquence triviale des définitions :

PROPOSITION 1. 12. — *Soit* $p \in N^n$ *(soit* K *un compact de* R^n*)*; $f \to x^p f$ *est une application linéaire continue de* $A_{loc}^{s,d}$ *(resp.* $A_K^{s,d}$*) dans* $A_{loc}^{s+|p|d,d}$ *(resp.* $A_K^{s+|p|d,d}$*).*

DÉFINITION 1. 10. — *Nous désignerons par* $\mathcal{E}_0$ *le sous-espace de* $\mathcal{E}$ *formé des* α *qui vérifient* $\alpha(0) = 0$.

$\mathcal{E}_0$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}$; il sera muni de la topologie induite par $\mathcal{E}$, qui en fait un espace de Fréchet; soit $\varphi \in \mathcal{E}_0$; pour chaque $j = 1, \ldots, n$ définissons $\varphi_j \in \mathcal{E}$ par :

$$x_j\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0) - \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, \ldots, 0).$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, on a : $\varphi(x) = x_1\varphi_1(x) + \cdots + x_n\varphi_n(x)$.

Nous noterons N l'application $\varphi \to (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $\mathcal{E}_0$ dans $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$.

Proposition 1. 13. — N *est un isomorphisme vectoriel-topologique de* $\mathcal{E}_0$ *dans* $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$.

1° N est biunivoque, car si tous les φ_j sont nuls, il en est de même de φ.

2° $N(\mathcal{E}_0)$ est fermé dans $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$. Car supposons que les φ_j convergent, pour chaque $j = 1, \ldots, n$, dans $\mathcal{E}$ vers une fonction ψ_j. Il est évident que ψ_j n'est fonction que des seules variables $x_1, \ldots, x_j$; posons :

$$\psi = x_1\psi_1 + \cdots + x_n\psi_n.$$

On a $\psi(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0) = x_1\psi_1(x) + \cdots + x_j\psi_j(x)$ et donc :

$$x_j\psi_j(x) = \psi(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0) - \psi(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, \ldots, 0).$$

Autrement dit, $(\psi_1, \ldots, \psi_n) = N(\psi)$.

3° L'application $(\chi_1, \ldots, \chi_n) \to x_1\chi_1 + \cdots + x_n\chi_n$ de $\overbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}^{m}$ dans $\mathcal{E}_0$ est continue. Sa restriction à $N(\mathcal{E}_0)$ est l'application réciproque de N. Le théorème de Banach entraîne donc immédiatement le résultat.

Corollaire 1. — $(\alpha, f) \to \alpha f$ *est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{E}_0 \times A^{s,d}_{\mathrm{loc}}$ *dans* $A^{s+d,d}_{\mathrm{loc}}$.

On applique la proposition 1. 13, la proposition 1. 12 et la proposition 1. 11.

§ 3. — Espaces $\mathcal{E}_v(k; E_s)$.

Rappelons que si V est une variété C^∞, dont le point courant est noté v, et si E est un espace vectoriel topologique (sur le corps C des complexes), on désigne par $\mathcal{E}^q_v(E)$ (q : entier $\geqslant 0$) l'espace des fonctions q fois continûment différentiables dans

V, à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme, pour les fonctions et toutes leurs dérivées d'ordre $\leqslant q$, sur chaque compact de V. L'intersection de tous les $\mathcal{E}_v^q(E)$, q parcourant N, est notée $\mathcal{E}_v(E)$; c'est l'espace des fonctions C^∞ de v à valeurs dans E; nous le supposerons muni de la topologie intersection des topologies induites par les $\mathcal{E}_v^q(E)$.

Donnons-nous, pour chaque $r \in R$, un sous-espace vectoriel E_r de E que nous supposerons muni d'une topologie (compatible avec la structure vectorielle) plus fine que celle induite par E. Nous ferons l'hypothèse suivante :

(Φ) *Si* $s \leqslant r$, E_r *est plongé continûment dans* E_s.

Définition 1. 11. — *Soient s réel, $k \geqslant 0$. Nous désignerons par $\mathcal{E}_v(k; E_s)$ l'espace des fonctions C^∞ dans V, à valeurs dans E, qui, pour tout entier $p \geqslant 0$, sont des fonctions C^p de v, à valeurs dans E_{s-kp}.*

On voit que, pour tout entier $p \geqslant 0$, $\mathcal{E}_v(k; E_s)$ peut être considéré comme un sous-espace de $\mathcal{E}_v^p(E_{s-kp})$; nous le munirons de la topologie intersection des topologies induites par les $\mathcal{E}_v^p(E_{s-kp})$. Si $k' \geqslant k$ et $r' \leqslant r$, $\mathcal{E}_v(k; E_r)$ est plongé continûment dans $\mathcal{E}_v(k'; E_{r'})$; et $\mathcal{E}_v(0; E_s) = \mathcal{E}_v(E_s)$ (au sens vectoriel-topologique).

Considérons maintenant un espace vectoriel topologique M (sur C) et, pour chaque $r \in R$, l'espace $L_b(M; E_r)$ (espace des applications linéaires continues de M dans E_r, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de M). Les $L_b(M; E_r)$ sont plongés continûment dans $L_b(M; E_r)$ et il est clair qu'ils vérifient (Φ) (car les E_r vérifient (Φ)). Nous avons donc le droit de considérer les espaces $\mathcal{E}_v(k; L(M; E))$ des fonctions C^∞ dans V, à valeurs dans $L_b(M; E)$, qui sont, pour tout entier $p \geqslant 0$, des fonctions C^p de v, à valeurs dans $L_b(M; E_{s-kp})$. Si nous avons à considérer, au lieu d'un seul espace M, une famille $\{M_r\}$ ($r \in R$) d'espaces vectoriels topologiques (vérifiant (Φ) ou non), pour r et s fixés, la notation $\mathcal{E}_v(k; L_b(M_r; E_s))$ sera conforme à la définition précédente (on substitue M_r à M).

Proposition 1. 14. — *Soient, pour chaque réel r, deux espaces vectoriels topologiques E_r et F_r; on suppose qu'il existe un espace vectoriel topologique E (resp. F) tel que tous les E_r (resp. F_r)*

soient plongés continûment dans E (*resp.* F), *et que les* E_r (*resp.* F_r) *vérifient* (Φ).

Soit, pour tout $\nu \in V$, *une application linéaire continue* $u(\nu)$ *de* E *dans* F, *ayant la propriété suivante : il existe un nombre réel a et un nombre* $k \geqslant 0$ *tels que, pour tout réel r,* $u(\nu) \in \mathcal{E}_\nu(k;\ L_b(E_r;\ F_{r-a}))$. *Alors, quels que soient le réel s et l'élément* $f(\nu)$ *de* $\mathcal{E}_\nu(k;\ E_s)$, *on a* $u(\nu)f(\nu) \in \mathcal{E}_\nu(k;\ F_{s-a})$.

Il suffit de prouver cette proposition pour $a = 0$; car posons $F'_r = F_{r-a}$; il est clair que la famille $\{F'_r\}$ vérifie aussi (Φ) et que $\mathcal{E}_\nu(k;\ F'_s) = \mathcal{E}_\nu(k;\ F_{s-a})$ et $\mathcal{E}_\nu(k;\ L_b(E_r;\ F'_r)) = \mathcal{E}_\nu(k;\ L_b(E_r;\ F_{r-a}))$.

Soit un opérateur différentiel quelconque D_ν sur V, d'ordre q; $D_\nu[u(\nu)f(\nu)]$ est une somme de termes de la forme $(D'_\nu u(\nu))\ D''_\nu f(\nu))$, où D'_ν et D''_ν sont des opérateurs différentiels sur V, d'ordre q' et q'' respectivement, avec $q' + q'' \leqslant q$. Par hypothèse, $D''_\nu f(\nu)$ est une fonction C^0 de ν à valeurs dans $E_{s-kq''}$ et $D'_\nu u(\nu)$ est une fonction C^0 de ν, à valeurs dans $L_b(E_{s-kq};\ F_{s-kq''-kq'})$. Il s'ensuit que $(D'_\nu u(\nu))\ (D''_\nu f(\nu))$ est une fonction continue de ν, à valeurs dans F_{s-kq}.

Le rôle des espaces E_r sera tenu, pour nous, par A^r, A^r_K, A^r_{loc}, $A^{r,d}_{loc}$, etc. (K*:* compact de R^n; *d:* nombre > 0 fixe), relatifs à la variable x de R^n. Nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 1. 15. — *Soient deux nombres réels s, t, un nombre* $k \geqslant 0$ *et un compact* K *de* R^n. *Soient* $\alpha(x, \nu) \in \mathcal{E}_{x,\nu}$, $f(x, \nu) \in \mathcal{E}_\nu(k;\ A^s_{loc})$, $g(x, \nu) \in \mathcal{E}_\nu(k;\ A^t_K)$ *arbitaires. Alors* $f(x, \nu)*g(x, \nu) \in \mathcal{E}_\nu(k;\ A^{s+t}_{loc})$ et $\alpha(x, \nu)f(x, \nu) \in \mathcal{E}_\nu(k;\ A^s_{loc})$.

Résulte directement des propositions 1. 14, 1. 7 et du corollaire 1 de la proposition 1. 8.

Proposition 1. 16. — *Soient un nombre* $k \geqslant 0$ *et un entier* $p \geqslant 0$ *quelconques. Tout élément de* $\mathcal{E}_\nu(k;\ A^{(k+1)p+n+1}_{loc})$ *est une fonction* C^p *de* (x, ν) *dans* $R^n \times V$.

Un tel élément est une fonction C^p de ν à valeurs dans A^{p+n+1}_{loc}. Il suffira donc de prouver que A^{p+n+1} est plongé continûment dans l'espace des fonctions C^p de x (muni de la topologie usuelle : convergence uniforme, sur chaque compact de R^n, de toutes les dérivées d'ordre $\leqslant p$).

Soit $q \in N^n$, $|q| \leqslant q$. Si $f(x)$ est une distribution tempérée, la transformée de Fourier de $D^q f(x)$ (D^q opérant au sens des distributions) est $y^q \hat{f}(y)$. Si $f(x) \in A^{p+n+1}$, $y^q \hat{f}(y)$ est sommable

sur R^n et par conséquent, $D^q f(x)$ est une fonction continue sur R^n, tendant vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. On a, de plus :

$$\|D^q f(x)\|_{L^\infty_x} \leqslant \int (1+|y|)^{-n-1}\, dy\, N_{p+n+1}(f).$$

c.q.f.d.

Proposition 1. 17. — *Soient s réel, $k \geqslant 0$ et $d > 0$. Si $\alpha(x) \in \mathcal{D}$ a son support dans le complémentaire de l'origine, $f(x, \nu) \to \alpha(x) f(x, \nu)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{E}_\nu(k; A^{s,d}_{loc})$ dans $\mathcal{E}_\nu(\mathcal{D}_x)$.*

Appelons K le support de $\alpha(x)$. Quel que soit l'entier $p \geqslant 0$, $\alpha(x) f(x, \nu)$ est une fonction C^p de ν à valeurs dans $(A^{s-kp,d}_K)_x$, espace qui est identique, d'après le corollaire 2 de la proposition 1. 9 à $(\mathcal{D}_K)_x$.

Corollaire 1. — *Les éléments de $\mathcal{E}_\nu(k; A^{s,d}_{loc})$ $(d > 0)$ sont indéfiniment différentiables par rapport à (x, ν) dans $(\complement \{0\}) \times V$.*

Corollaire 2. — *Si K est un compact contenu dans $\complement \{0\}$ et si $d > 0$, $\mathcal{E}_\nu(k; A^{s,d}_K) = \mathcal{E}_\nu((\mathcal{D}_K)_x)$ (identité au sens vectoriel topologique).*

L'un des avantages de l'introduction des espaces $\mathcal{E}_\nu(k; E_r)$ est lié à la généralisation d'un résultat de Mizohata ([2], p. 173 et 174).

Le rôle de la variété V va être tenu par un ouvert Ω de R^n, dont le point variable sera noté ξ. Tous les espaces indiciés par ξ seront relatifs à cet ouvert; ainsi par exemple $\mathcal{E}_\xi(k; A^s_K)$.

Soit $T(x)$ une distribution sur R^n. Suivant Schwartz, appelons $T(x - x_0)$ ($x_0 \in R^n$ fixe) la distribution définie par $\int T(x-x_0)\varphi(x)\, dx = \int T(x)\varphi(x+x_0)\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}_x$. Si $T(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(\mathcal{D}'_x)$, on a évidemment aussi $T(x-\xi, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(\mathcal{D}'_x)$. Sous certaines conditions, on peut affirmer que l'on a aussi

$$T(x-\xi, \xi) \in \mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_\xi) = \mathcal{D}'_\xi(\mathcal{E}_x) = L_b(\mathcal{D}_\xi; \mathcal{E}_x)\ (^6).$$

Mizohata a montré que c'est le cas s'il existe un réel s tel que $T(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(A^s_{loc})$. Cet espace étant identique à $\mathcal{E}_\xi(k; A^s_{loc})$ avec $k = 0$, on peut se demander s'il n'est pas possible d'étendre la propriété précédente à des valeurs > 0 de k. On ne peut

(6) Pour les définitions et les propriétés de ces espaces, voir Schwartz [2], [3].

espérer l'étendre à $k \geqslant 1$, comme le prouve l'exemple de $\delta(x+\xi) \in \mathcal{E}_\xi(1\,;\,\mathrm{A}^0)$, car $\delta(x+\xi-x) = \delta_x \notin \mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_\xi)$. Compte tenu de ceci, le résultat suivant constitue une sorte d'optimum :

PROPOSITION 1. 18. — *Soient s réel, $k \geqslant 0$, et un compact* K *de* R^n *arbitraires. Si $k < 1$, pour toute $f(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(k\,;\,\mathrm{A}^s_{\mathrm{K}})$, $\varphi(\xi) \to \int f(x-\xi, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_\xi$ dans $\mathcal{D}_x$.*

Notons $\hat{f}(y, \xi)$ la transformée de Fourier de $f(x, \xi)$; celle de $f(x-\xi, \xi)$ est $\hat{f}(y, \xi) \exp(2i\pi\langle y, \xi\rangle)$. En particulier, d'après la définition de $\mathcal{E}_\xi(k\,;\,\mathrm{A}^s_{\mathrm{H}})$, c'est une fonction indéfiniment dérivable de ξ à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$. Si donc $\varphi \in \mathcal{D}_\xi$,

$$\Phi(x) = \int f(x-\xi, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

est une distribution tempérée, dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\Phi}(y) = \int e^{2i\pi\langle y,\xi\rangle}\,\hat{f}(y, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Soit alors $p \in \mathrm{N}^n$ arbitraire ; nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} y^p\hat{\Phi}(y) &= \int \mathrm{D}^p_\xi\,(e^{2i\pi\langle y,\xi\rangle})\hat{f}(y,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \\ &= (-1)^{|p|}\int e^{2i\pi\langle y,\xi\rangle}\,\mathrm{D}^p_\xi[\hat{f}(y,\xi)\varphi(\xi)]\,d\xi \\ &= \sum_{\substack{q_j \leqslant p_j \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \binom{p_1}{q_1}\cdots\binom{p_n}{q_n}(-1)^{|p|}\int e^{2i\pi\langle y,\xi\rangle}[\mathrm{D}^q_\xi\hat{f}(y,\xi)]\,\mathrm{D}^{p-q}_\xi\varphi(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{D}^q_\xi f(x, \xi)$ est une fonction continue de ξ à valeurs dans $\mathrm{A}^{s-k|p|}_k$. Il existe donc une constante finie M_q telle que, pour tout point ξ du support de φ et tout $y \in \mathrm{R}^n$:

$$(1+|y|^2)^{s-k|q|/2}\,|\mathrm{D}^q_\xi\hat{f}(y, \xi)| \leqslant \mathrm{M}_q.$$

De la résulte qu'il existe $\mathrm{M}'_p < +\infty$ telle qu'on ait, pour tout $y \in \mathrm{R}^n$:

$$(1+|y|^2)^{s-k|p|/2}\,|y^p|\,|\hat{\Phi}(y)| \leqslant \mathrm{M}'_p \sup_{\substack{q_j\leqslant p_j \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \|\mathrm{D}^q\varphi(\xi)\|_{\mathrm{L}^1}.$$

En particulier, on voit, en prenant $p = 0$, que $\Phi(y)$ est bornée sur tout compact ; il en résulte que, pour tout entier

$m \geqslant 0$, il existe une constante finie M'_m telle que, pour tout $y \in R^n$:

$$(1 + |y|^2)^{s+(1-k)m/2}|\hat{\Phi}(y)| \leqslant M'_m \sup_{|p| \leqslant m} ||D^p \varphi(\xi)||_{L^1}.$$

Comme $k < 1$, $s + (1 - k)m$ peut être rendu arbitrairement grand en prenant m suffisamment grand; ceci prouve que $\Phi(x) \in A^r$ pour tout réel r; autrement dit, $\Phi(x) \in A^\infty$. D'autre part, lorsque ξ reste dans le support de φ, $f(x - \xi, \xi)$ garde son support dans un compact fixe de R^n; par conséquent, $\Phi(x)$ est à support compact, autrement dit $\Phi(x) \in \mathcal{D}_x$.

La continuité de l'application $\varphi(\xi) \to \Phi(x)$ de $\mathcal{D}_\xi$ dans $\mathcal{D}_x$ résulte, si l'on veut, du théorème du graphe fermé.

Corollaire 1. — *Si $k < 1$, pour toute $f(x, \xi) \in \mathcal{E}_\xi(k; A^s_{\text{loc}})$, $\varphi(\xi) \to \int f(x - \xi, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_\xi$ dans $\mathcal{E}_x$.*

CHAPITRE II

OPÉRATEURS HYPOELLIPTIQUES À COEFFICIENTS CONSTANTS DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

§ 1. Opérateurs hypoélliptiques à coefficients constants.

Les opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants ont été caractérisés par Hörmander (dans [1], chap. III; voir aussi Ehrenpreis [1]). A leur sujet, nous aurons besoin de l'équivalence suivante (Malgrange [2], p. 291 et 292) :

Proposition 2. 1. — *Soit* P(D) *un opérateur différentiel à coefficients constants sur* R^n. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) P(D) *est hypoelliptique.*

b) *Il existe un nombre* $s > 0$ *et une constante finie* A *tels que, pour tout* $p \in N^n$, $p \neq 0$ *et tout* $y \in R^n$, *on ait :*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} |P^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P(y)|).$$

Deux conséquences directes de cette proposition :

Corollaire 1. — *Soit* P(D) *hypoelliptique d'ordre* $\geqslant 1$. *Il existe un nombre* $s > 0$ *et une constante finie* A′ *tels que, pour tout* $y \in R^n$, *on ait :*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A' (1 + |P(y)|).$$

En effet, si le degré de $P(y)$ est $\geqslant 1$, il existe $p \in N^n$, $p \neq 0$, tel que $P^{(p)}(y)$ soit une constante non nulle.

Corollaire 2. — *Soit* P(D) *hypoelliptique d'ordre* $\geqslant 1$. *Notons pour chaque* $j = 1, \ldots, n$, m_j *l'ordre de* P(D) *par rapport à* x_j. *Alors le coefficient de* $y_j^{m_j}$ *dans* $P(y)$ *est une constante.*

Raisonnons par l'absurde : supposons que

$$P(y) = Q(y_2, \ldots, y_n)y_1^{m_1} + R(y)$$

avec $\deg_{y_1} R(y) \leqslant m_1 - 1$ et $\deg Q(y_2, \ldots, y_n) \geqslant 1$. Alors il existe $p \in N^n$, $p \neq 0$ et $p_1 = 0$, tel que $Q^{(p)}$ soit une constante non nulle. Donc $P(y_1, 0, \ldots, 0)$ et $P^{(p)}(y_1, 0, \ldots, 0)$ sont deux polynômes en y_1 de degré $\leqslant m_1$, le second étant effectivement de degré m_1. On voit tout de suite que la condition (b) de la proposition 2. 1 ne peut être vérifiée.

L'hypoellipticité est invariante par changement de variables linéaire dans R^n, comme il est manifeste d'après la proposition 2. 1 : le raisonnement précédent appliqué à

$$P_j(y) = P(y_j, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_1, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

pour chaque $j = 2, \ldots, n$, achève d'établir le corollaire 2.

Nous aurons besoin de la notion suivante due à Hörmander :

Définition 2. 1. — *Soient* $P(D)$ *et* $Q(D)$ *deux polynômes différentiels sur* R^n. *Supposons* $P(D)$ *hypoelliptique. Nous dirons que* $P(D)$ *est plus fort que* $Q(D)$) *ou bien que* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$) *s'il existe une constante finie* A *telle qu'on ait, pour tout* $y \in R^n$:

$$|Q(y)| \leqslant A(1 + |P(y)|).$$

Si de plus $Q(D)$ *est hypoelliptique et plus fort que* $P(D)$, *nous dirons que* $P(D)$ *et* $Q(D)$ *sont équivalents.*

D'après cette définition, l'énoncé suivant est évident :

Proposition 2. 2. — *Soient deux opérateurs différentiels à coefficients constants* $P(D)$, $Q(D)$. *Supposons* $P(D)$ *hypoelliptique et* $Q(D)$ *plus faible que* $P(D)$. *Soit* y_0 *un point quelconque de* R^n. *Si* X *représente une indéterminée, le degré en* X *de* $Q(Xy_0)$ *est inférieur ou égal à celui de* $P(Xy)_0$.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2. 2, *le degré par rapport à* $y_j (j = 1, \ldots, n)$ *de* $Q(y)$ *est inférieur ou égal à celui de* $P(y)$.

§ 2. Familles formellement hypoelliptiques.

Soit J un ensemble d'indices quelconques. Donnons-nous, pour chaque $j \in J$, un polynôme différentiel $P_j(D)$ sur R^n.

Définition 2. 2. — *Nous dirons que la famille* $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ *est d'ordre borné s'il existe un entier* $m \geqslant 0$ *tel que, pour tout* $j \in J$, *l'ordre de* $P_j(D)$ *est* $\leqslant m$. *Nous dirons que la famille* $\{P_j(D)\}$ *est d'ordre* m *si, pour tout* $j \in J$, $P_j(D)$ *est effectivement d'ordre* m.

Soit $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ une famille d'ordre borné; soit $P(D)$ un opérateur quelconque de la famille. Il existe r opérateurs $P_k(D)$ $(k = 1, \ldots, r < +\infty)$ de la famille et $(r+1)$ fonctions $a_0(j)$, $a_k(j)$ $(k = 1, \ldots, r)$ ayant les propriétés suivantes :

1° les opérateurs $P(D)$, $P_k(D)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ sont linéairement indépendants.

2° Pour tout $j \in J$, $P_j(D) = a_0(j)\, P(D) + \sum_{k=1}^{r} a_k(j) \; P_k(D)$.

En effet, puisque la famille est d'ordre borné, les $P_j(D)$ $(j \in J)$ engendrent (avec C comme corps des scalaires) un espace vectoriel (de polynômes différentiels sur R^n) de dimension finie. Il existe une base de cet espace extraite de la famille $\{P_j(D)\}$ et comprenant $P(D)$.

Définition 2. 3. — *Soit* $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ *une famille d'ordre borné. Toute décomposition des* $P_j(D)$ *du type ci-dessus sera appelée une décomposition interne des* $P_j(D)$.

Dans la décomposition interne précédente, si $P(D)$ correspond à l'indice j_0, on aura nécessairement : $a_0(j_0) = 1$, $a_k(j_0) = 0$ pour $k = 1, \ldots, r$.

Définition 2. 4. — *Nous dirons que la famille* $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ *est formellement hypoelliptique si, pour tout* $j \in J$, $P_j(D)$ *est hypoelliptique et si, pour tout* $(i, j) \in J \times J$, $P_i(D)$ *et* $P_j(D)$ *sont équivalents.*

Si la famille $\{P_j(D)\}$ $(j \in J)$ est formellement hypoelliptique, tous les $P_j(D)$ ont le même ordre m : la famille $\{P_j(D)\}$ est d'ordre m. En particulier, elle est d'ordre borné.

Dans la suite, l'ensemble d'indices sera une variété différentiable que nous appellerons V; les indices seront les points de V, dont le point courant sera noté v. Au lieu d'écrire $P_v(D)$, nous écrirons $P(v, D)$; les coefficients (constants sur R^n) de $P(v, D)$ seront des fonctions de v.

Définition 2. 5. — *Soit* V *une variété différentiable de classe* q $(0 \leqslant q \leqslant +\infty)$. *Soit* $\{P(v, D)\}$ $(v \in V)$ *une famille de polynômes différentiels sur* R^n *d'ordre borné. Nous dirons que*

c'est une famille C^q sur V si les coefficients de $P(\nu, D)$ sont des fonctions C^q sur V.

Nous dirons toujours « famille continue » au lieu de « famille C^0 ». Nous aurions pu définir des familles analytiques, holomorphes, etc. Par coefficients de $P(D)$, nous entendons les composantes de $P(D)$ relatives à la base de l'espace vectoriel de tous les polynômes différentiels sur R^n constituée par les monômes de dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} (p \in N^n)$. Si $\{P(\nu, D)\}$ est une famille C^q sur V, les fonctions $a_0(\nu)$, $a_k(\nu)$ d'une décomposition interne quelconque des $P(\nu, D)$ sont de classe C^q qur V.

Nous allons maintenant étudier les familles formellement hypoelliptiques ; l'énoncé suivant est fondamental :

Proposition 2. 3. — *Soient V une variété de classe C^0, $\{P(\nu, D)\}(\nu \in V)$ une famille continue sur V, formellement hypoelliptique. Pour tout $\nu_0 \in V$ et tout compact K de V, il existe deux constantes finies $C_1(\nu_0, K)$, $C_2(\nu_0, K)$ telles qu'on ait, pour tout $y \in R^n$ et tout $\nu \in K$:*

$$1 + |P(\nu_0, y)| \leqslant C_1(\nu_0, K)(1 + |P(\nu, y)|) \leqslant C_2(\nu_0, K)(1 + |P(\nu_0, y)|).$$

Considérons une décomposition interne des $P(\nu, D)$:

$$P(\nu, D) = a_0(\nu)P_0(D) + \sum_{k=1}^{r} a_k(\nu)P_k(D) \quad \text{avec} \quad P_0(D) = P(\nu_0, D).$$

On a : $a_0(\nu_0) = 1$ et $a_k(\nu_0) = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, r$. Les $P_k(D)$ sont plus faibles que $P_0(D)$; il esiste donc $A < +\infty$ tel que $|P_k(y)| \leqslant A(1 + |P_0(y)|)$ pour tout $y \in R^n$ et tout $k = 1, \ldots, r$. Soit $U(\nu_0)$ un voisinage ouvert de ν_0 dans V tel que $|a_0(\nu)| \geqslant \frac{2}{3}$, $|a_k(\nu)| \leqslant \frac{1}{3Ar}$ pour tout $\nu \in U(\nu_0)$ et tout $k = 1, \ldots, r$ (ceci est possible parce que les $a_j(\nu)$ sont continues) On a alors :

$$1 + |P(\nu, y)| \geqslant |a_0(\nu)|\,|P_0(y)| + 1 - \sum_{k=1}^{r} |a_k(\nu)|\,|P_k(y)| \geqslant \frac{1}{3}(1 + |P_0(y)|)$$

soit, pour tout $y \in R^n$ et tout $\nu \in U(\nu_0)$:

$$1 + |P(\nu_0, y)| \leqslant 3(1 + |P(\nu, y)|).$$

Appliquons d'abord ce résultat pour ν_0 parcourant le compact K; on obtient un recouvrement de K par les ouverts $U(\nu_0)$, dont on peut extraire un recouvrement fini $U(\nu_1), \ldots, U(\nu_s)$. On a donc, pour tout $i = l, \ldots s$, tout $\nu \in U(\nu_i)$ et tout $y \in R^n$:

$$1 + |P(\nu_i, y)| \leqslant 3(1 + |P(\nu, y)|).$$

Redonnons à ν_0 la signification de point arbitraire de V; puisque la famille $\{P(\nu, D)\}$ est formellement hypoelliptique, il existe une constante finie A telle qu'on ait, pour tout $i = l, \ldots, s$ et tout $y \in R^n$:

$$1 + |P(\nu_0, y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_i, y)|).$$

En combinant les deux derniers systèmes d'inégalités, on obtient la 1[re] partie de l'inégalité de l'énoncé.

Pour la deuxième partie, reprenons la décomposition interne des $P(\nu, D)$ introduite au début. Posons $B(K) = \sup_{\nu \in K} \sup_{0 \leqslant j \leqslant r} |a_j(\nu)|$. On a :

$$|P(\nu, y)| \leqslant AB(K)\,(1 + |P(\nu_0, y|).$$

pour tout $\nu \in K$ et tout $y \in R^n$. D'où aussitôt le résultat.

Corollaire 1. — *Soient une variété* V *de classe* C^q, $\{P(\nu, D)\}$ $(\nu \in V)$ *une famille formellement hypoelliptique,* C^q *sur* V. *Pour tout compact* K *de* V *et tout opérateur différentiel* D_v *sur* V, *d'ordre* $\leqslant q$, *il existe une constante finie* $C(K, D_v)$ *telle qu'on ait, pour tout* $\nu \in K$ *et tout* $y \in R^n$:

$$|D_v P(\nu, y)| \leqslant C(K, D_v)\,(1 + |P(\nu, y)|).$$

Prenons en effet une décomposition interne quelconque des $P(\nu, D)$:

$$P(\nu, D) = \sum_{j=0}^{r} a_j(\nu)\, P_j(D)$$

et posons $B(K, D_v) = \sup_{v \in K} \sup_{0 \leqslant j \leqslant r} |D_v a_j(\nu)|$. On a évidemment :

$$|D_v P(\nu, y)| \leqslant B(K, D_v) \sum_{j=0}^{r} |P_j(y)|.$$

Mais d'après la proposition 2. 3, il existe $C_j(K)$ $0 \leqslant j \leqslant r)$ finie telle qu'on ait :

$$|P_j(y)| \leqslant C_j(K)\,(1 + |P(\nu, y)|)$$

pour tout $v \in K$, tout $y \in R^n$ et tout $j = 0, 1, \ldots, r$, d'où le corollaire.

Corollaire 2. — *Mêmes hypothèses que dans le corollaire 1. Il existe un nombre $s > 0$ tel que, pour tout opérateur différentiel D_v sur V d'ordre $\leqslant q$ et tout compact K de V, il existe une constante finie $C(K, D_v)$ telle que, pour tout $v \in K$, tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, et tout $y \in R^n$, on ait :*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \, |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant C(K, D_v) \, (1 + |P(v, y)|).$$

Soit $P(v, D) = \sum_{j=0}^{r} a_j(v) P_j(D)$ une décomposition interne quelconque de $P(v, D)$. D'après la proposition 2. 1, il existe $s > 0$ et $A < +\infty$ tels que, pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, tout $y \in R^n$ et tout $j = 0, 1, \ldots, r$:

$$(1 + |y|^2)^{s/2} |P_j^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P_j(y)|).$$

Posons maintenant $B(K, D_v) = \sup_{v \in K} \sup_{0 \leqslant j \leqslant r} |D_v a_j(v)|$. On a évidemment :

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \, |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant AB(K, D_v) \sum_{j=0}^{r} (1 + |P_j(y)|)$$

pour tout $y \in R^n$, tout $v \in K$ et tout $p \in N^n$, $p \neq 0$. On conclut comme pour le corollaire 1.

Corollaire 3. — *Soient V une variété C^0, $\{P(v, D)\} (v \in V)$ une famille formellement hypoelliptique sur V, continue, d'ordre $\geqslant 1$. Il existe un nombre $s > 0$ tel qu'il existe, pour tout compact K de V, une constante finie A(K) telle qu'on ait, pour tout $v \in K$ et tout $y \in R^n$:*

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A(K) \, (1 + |P(v, y)|).$$

Prenons un point $v_0 \in V$ quelconque; il existe $s > 0$ et $A < +\infty$ tels que

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A(1 + |P(v_0, y)|)$$

pour tout $y \in R^n$; ceci résulte du corollaire de la 1 proposition 2. 1. Le corollaire 3 résulte alors de la première inégalité de la proposition 2. 3.

DÉFINITION 2. 6. — *Soient* M, H *deux nombres* $\geqslant 0$ *finis. Nous désignerons par* $h(\mathrm{M}, \mathrm{H}, y)$ *la fonction sur* R^n *définie ainsi :*

$$h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y) = 0 \text{ si } y_2^2 + \cdots + y_n^2 > \mathrm{M}^2;$$
$$h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y) = 0 \text{ si } y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant \mathrm{M}^2 \text{ et } y_1^2 \geqslant \mathrm{H}^2;$$
$$h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y) = \sqrt{\mathrm{H}^2 - y_1^2} \text{ si } y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant \mathrm{M}^2 \quad \text{et si} \quad y_1^2 \leqslant \mathrm{H}^2.$$

Cette définition, et la construction qui va suivre, sont directement inspirées de Hörmander ([1], p. 223 et 224).

PROPOSITION 2. 4. — *Soient une variété* V *de classe* C^0, $\{\mathrm{P}(v, \mathrm{D})\}$ $(v \in \mathrm{V})$ *une famille formellement hypoelliptique, continue sur* V, *d'ordre* $\geqslant 1$. *Pour tout compact* K *de* V, *il existe deux constantes positives finies* M, H *telles qu'on ait, pour tout* $v \in \mathrm{K}$ *et tout* $y \in \mathrm{R}^n$:

$$|\mathrm{P}(v, y_1 + ih(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y), y_2, \ldots, y_n)| \geqslant 1.$$

Pour obtenir une borne inférieure de H, appliquons le corollaire 3 de la proposition 2. 3 : il existe $\mathrm{M}_0 < +\infty$ tel que si $v \in \mathrm{K}$ et $|y| \geqslant \mathrm{M}_0$, $|\mathrm{P}(v, y)| \geqslant 1$.

Pour obtenir une borne inférieure de M, remarquons que tous les $\mathrm{P}(v, y)$ $(v \in \mathrm{V})$ ont même degré $m_1 \geqslant 1$ par rapport à y_1 (corollaire 1 de la proposition 2. 2) et que le coefficient de $y_1^{m_1}$ dans $\mathrm{P}(v, y)$ est une fonction continue dans V, ne s'annulant jamais, donc uniformément minorée en valeur absolue sur K. Si $v \in \mathrm{K}$ et si $y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \mathrm{M}^2$, les racines du polynôme en Z_1 $\mathrm{P}(v, \mathrm{Z}_1, y_2, \ldots, y_n)$ restent dans un compact (dépendant de M et de K) du plan complexe. Il existe $\mathrm{H}_0 < +\infty$ tel que si $|z_1| \geqslant \mathrm{H}_0$, pour ces v et ces $y_2, \ldots, y_n$, $|\mathrm{P}(v, z_1, y_2, \ldots, y_n)| \geqslant 1$. En prenant $\mathrm{H}_0 \geqslant \mathrm{M}$, on vérifie sans peine que $h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y)$ satisfait pour tous $\mathrm{H} \geqslant \mathrm{H}_0$, $\mathrm{M} \geqslant \mathrm{M}_0$, aux conditions de l'énoncé.

Dans les corollaires qui suivent, $h(\mathrm{M}, \mathrm{H}; y)$ désignera la fonction qui vient d'être construite (relativement à un compact K donné arbitrairement dans V); $\mathrm{S}(h)$ désignera le support de cette fonction.

COROLLAIRE 1. — *Mêmes hypothèses que dans la proposition* 2. 4. *Pour tout* $v_0 \in \mathrm{V}$, *il existe une constante finie* $\mathrm{A}(v_0)$ *telle que, pour tout* $v \in \mathrm{K}$ *et tout* $y \in \complement\, \mathrm{S}(h)$, *on ait :* $|\mathrm{P}(v_0, y)| \leqslant \mathrm{A}(v_0)|\mathrm{P}(v, y)|$.

On applique les propositions 2. 3 et 2. 4, compte tenu de ce que, si $y \in \complement S(h)$, $P(\nu, y) = P(\nu, y_1 + ih(M, H; y), y_2, \ldots, y_n)$ et donc $|P(\nu, y)| \geqslant 1$.

Corollaire 2. — *Mêmes hypothèses que dans la proposition 2. 4. Il existe un nombre $s > 0$, indépendant du compact* K, *et une constante finie* A *tels qu'on ait, pour tout $\nu \in K$ et tout $y \in \complement S(h)$* :

$$(1 + |y|^2)^{s/2} \leqslant A|P(\nu, y)|.$$

On applique la proposition 2. 4 et le corollaire 3 de la proposition 2. 3. La constante A de l'énoncé dépend du compact K.

Corollaire 3. — *On suppose que la variété* V *est de classe C^q et que la famille $\{P(\nu, D)\}$ $(\nu \in V)$ est C^q sur* V; *par ailleurs, on fait les mêmes hypothèses que dans la proposition 2. 4. Pour tout opérateur différentiel D_ν sur* V, *d'ordre $\leqslant q$, il existe une constante finie $C(D_\nu)$ telle qu'on ait, pour tout $\nu \in K$ et tout $y \in \complement S(h)$* :

$$|D_\nu P(\nu, y)| \leqslant C(D_\nu)\, |P(\nu, y)|.$$

Résulte de la proposition 2. 4 et du corollaire 1 de la proposition 2. 3. La constante $C(D_\nu)$ dépend de K.

Corollaire 4. — *Mêmes hypothèses que dans le corollaire* 3. *Il existe un nombre $s > 0$, indépendant du compact* K, *tel que, pour tout opérateur différentiel D_ν sur* V, *d'ordre $\leqslant q$, il existe une constante finie $C(D_\nu)$ telle qu'on ait, pour tout $\nu \in K$, tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, et tout $y \in \complement S(h)$* :

$$(1 + |y|^2)^{s/2}\, |D_\nu P^{(p)}(\nu, y)| \leqslant C(D_\nu)\, |P(\nu, y)|.$$

Résulte de la proposition 2. 4 et du corollaire 2 de la proposition 2. 3. La constante $C(D_\nu)$ dépend de K.

Nous avons maintenant tout en main pour démontrer le théorème principal de ce chapitre.

§ 3. Le théorème principal.

Théorème 2. 1. — *Soient une variété indéfiniment différentiable* V, *$\{P(\nu, D)\}$ une famille formellement hypoelliptique, d'ordre $m \geqslant 1$, C^∞ sur* V. *Il existe deux nombres > 0 s, d tels*

qu'il existe une application indéfiniment différentiable $\nu \to E(x, \nu)$ de V dans $A^{s,d}_{loc}$ telle qu'on ait, pour tout $\nu \in V$, $P(\nu, D)E(x, \nu) = \delta_x$.

Principe de la démonstration.

Étant donné un ouvert relativement compact U quelconque de V, nous allons construire, pour tout $\nu \in U$, une solution élémentaire $E_U(x, \nu)$ de $P(\nu, D)$, sous forme d'une somme $F_U(x, \nu) + G_U(x, \nu)$ où $F_U(x, \nu)$ sera une fonction analytique de x, prolongeable aux valeurs complexes des variables $x_1, \ldots, x_n$ en une fonction analytique entière de type exponentiel; de plus, $F_U(x, \nu)$ sera une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $\mathcal{E}_x$. Quant à $G_U(x, \nu)$, ce sera, pour deux nombres s, $d > 0$ convenablement choisis, une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $A^{s,d}_{loc}$.

Ceci aura prouvé le théorème 2. 1 pour U à la place de V. A partir de là, il suffira de se donner un recouvrement localement fini de V par des ouverts U_i ($i \in J$) relativement compacts, et une partition de l'unité $\{\alpha_i\}$ ($i \in J$) dans $\mathcal{D}(V)$, subordonnée à ce recouvrement, et de poser :

$$E(x, \nu) = \sum_{i \in J} \alpha_i(\nu) E_{U_i}(x, \nu);$$

$E(x, \nu)$ remplira manifestement les conditions de l'énoncé.

Notations.

Nous noterons K l'adhérence de l'ouvert relativement compact U. La proposition 2. 4 attache à la famille $\{P(\nu, D)\}$ et au compact K une fonction $h(M, H; y)$ dont nous appellerons $S(h)$ le support (compact); nous appellerons h le vecteur $(h(M, H; y), 0, \ldots, 0)$ de R^n. L'image de $S(h)$ par l'application $y \to y + ih$ est un compact de C^n; nous le noterons $L(h)$: précisément, c'est l'ensemble des $z \in C^n$ qui vérifient les conditions :

$$z_2^2 + \ldots + z_n^2 \leqslant M^2, |z_1| = H, \operatorname{Im} z_1 \geqslant 0 \qquad \text{(déf. 2. 6)}.$$

A part cela, nous écrirons plutôt $E(x, \nu)$, $F(x, \nu)$, $G(x, \nu)$ à la place respectivement de $E_U(x, \nu)$, $F_U(x, \nu)$, $G_U(x, \nu)$.

Enfin, m désignera l'ordre des opérateurs $P(\nu, D)$ et s le plus petit des nombres ainsi notés dans les corollaires 2 et 3 de la proposition 2. 3, et attachés par ces corollaires à la famille $\{P(\nu, D)\}$.

1° *Construction de* $F(x, \nu)$.

Appelons $\hat{F}(z, \nu)$ (pour $\nu \in U$) la fonction sur $L(h)$ égale à $\dfrac{1}{P(\nu, z)}$; en vertu de la proposition 2. 4, $|\hat{F}(z, \nu)| \leqslant 1$ pour tout $\nu \in K$ et tout $z \in L(h)$. Posons :

$$F(x, \nu) = \int_{L(h)} \hat{F}(z, \nu) \exp(2i\pi \langle x, z \rangle)\, dz$$

(dz est la mesure image par $y \rightarrow y + ih$ de la mesure dy sur $S(h)$). On voit immédiatement que $\hat{F}(z, \nu)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $L^{\infty}_{L(h)}$ (espace L^{∞} pour dz). De ce que $L(h)$ est compact résulte que $F(x, \nu)$ est une fonction analytique de x, prolongeable aux valeurs complexes de $x_1, \ldots, x_n$ en une fonction entière de type exponentiel, et $\nu \rightarrow F(x, \nu)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U, à valeurs dans $\mathcal{E}_x$; il en résulte, en particulier, que, quel que soit le polynôme différentiel $Q(D)$ sur R^n et les nombres réels σ, τ, $\nu \rightarrow Q(D)\, F(x, \nu)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ν dans U à valeurs dans $A^{\sigma, \tau}_{\text{loc}}$.

Ceci dit, si $\varphi \in \mathcal{D}_x$, on a :

$$\int F(x, \nu)\varphi(-x)\, dx = \int_{L(h)} \hat{F}(z, \nu)\hat{\varphi}(z)\, dz = \int_{S(h)} \frac{\hat{\varphi}(y + ih)}{P(\nu, y + ih)}\, dy.$$

Si (pour $\nu \in U$ fixé), $\varphi(x) = P(\nu, D)\psi(x)$, $\psi \in \mathcal{D}_x$, on aura :

$$\int F(x, \nu)\varphi(-x)\, dx = \int_{L(h)} \hat{\psi}(z)\, dz = \int_{S(h)} \hat{\psi}(y)\, dy,$$

la dernière égalité provenant du fait que $L(h)$ et $S(h)$ sont homotopes dans C^n et compacts et que $\hat{\psi}(z)$ est une fonction entière. Enfin, comme $\varphi(-x) = P(\nu, -D)\, (\psi(-x))$ et que le transposé de $P(\nu, -D)$ est $P(\nu, D)$, on voit que :

$$\int [P(\nu, D)\, F(x, \nu)]\, \psi(-x)\, dx = \int_{S(h)} \hat{\psi}(y)\, dy. \tag{2. 1}$$

2° *Construction de* $G(x, \nu)$.

Appelons $\hat{G}(y, \nu)$ ($\nu \in U$) la fonction sur R^n égale à 0 pour $y \in S(h)$ et à $\dfrac{1}{P(\nu, y)}$ ailleurs. Le corollaire 2 de la proposition 2. 4 montre que $(1 + |y|^2)^{s/2}\ \hat{G}(y, \nu)$ est, pour tout $\nu \in U$, une fonction bornée sur R^n. Si donc $G(x, \nu)$ désigne la transformée

de Fourier réciproque de $\hat{G}(y, \nu)$, on voit que $G(x, \nu) \in A^s$ pour tout $\nu \in U$. Si $\varphi \in \mathcal{D}_x$:

$$\langle G(x, \nu), \varphi(-x)\rangle = \int_{R^n} \hat{G}(y, \nu)\hat{\varphi}(y)\, dy,$$

et si $\varphi = P(\nu, D)\psi$, avec $\psi \in \mathcal{D}_x$:

$$(2.\ 2) \quad \langle G(x, \nu), \varphi(-x)\rangle = \langle P(\nu, D)G(x, \nu), \psi(-x)\rangle = \int_{\complement S(h)} \hat{\psi}(y)\, dy.$$

Il nous faut maintenant étudier $G(x, \nu)$. Pour obtenir un peu plus que le théorème 2. 1, nous allons faire intervenir un polynôme différentiel $Q(D)$ sur R^n qui possède la propriété suivante :

(W) *Il existe* $\nu_0 \in V$, *un nombre* $a \geqslant 0$, *un nombre* $r > 0$ *tel qu'on ait, pour tout* $y \in R^n$:

$$(1 + |y|^2)^{a/2} |Q(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|),$$
$$(1 + |y|^2)^{r/2} |Q^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|)$$

pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$, A *étant une constante positive finie, indépendante de* p *et de* y.

Il découle du corollaire 1 de la proposition 2. 4 que (W) est équivalente à :

(W′) *Il existe un nombre* $a \geqslant 0$, *un nombre* $r > 0$ *et, pour chaque compact* H *de* V, *une constante* $A(H)$, $0 \leqslant A(H) < +\infty$, *tels que, pour tout* $y \in \complement S(h)$ *et tout* $\nu \in H$

$$(1 + |y|^2)^{a/2} |Q(y)| \leqslant A(H)\, |P(\nu, y)|,$$
$$(1 + |y|^2)^{r/2} |Q^{(p)}(y)| \leqslant A(H)\, |P(\nu, y)|$$

pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$.

Remarque. — Supposons que $Q(y) = 1$; alors $Q(D)$ vérifie (W) où l'on peut choisir $a = s$ et pour r, n'importe quel nombre > 0. Si $Q(D) = P(\nu_0, D)$ ($\nu_0 \in V$), $Q(D)$ vérifie aussi (W) et l'on peut prendre $a = 0$ et $r = s$.

Ceci dit, soit $p \in N^n$ arbitraire, D_ν un opérateur différentiel quelconque sur V, dont l'ordre sera noté ω. La transformée de Fourier de $x^p D_\nu[Q(D)\, G(x, \nu)]$ est $D_y^p D_\nu[Q(y)\, \hat{G}(y, \nu)]$ (D_y^p opérant au sens des distributions). D'après la définition de $\hat{G}(y, \nu)$, $D_\nu[Q(y)\, \hat{G}(y, \nu)]$ est une fonction indéfiniment différentiable de y dans $\complement S(h)$ et nulle dans $S(h)$. Par conséquent,

$D_y^p D_v[Q(y)\,\hat{G}(y, v)]$ est la somme d'une distribution $f(y, v)$ portée par la frontière $\dot{S}(h)$ de $S(h)$ et de la fonction $\hat{g}(y, v)$ nulle sur $S(h)$ et égale, pour $y \in \complement S(h)$, à $D_y^p D_v\left[\dfrac{Q(y)}{P(v, y)}\right]$.

Comme $\dot{S}(h)$ est compacte, la transformée de Fourier réciproque de $\hat{f}(y, v)$ est une fonction analytique $f(x, v)$ de x; on vérifierait sans peine que $v \to f(x, v)$ est une application continue de U dans $\mathcal{E}_x$.

Pour $y \in \complement S(h)$ (et $v \in U$), $\hat{g}(y, v)$ est de la forme $R(v, y)/[P(v, y)]^{|p|+\omega+1}$, où $R(v, y)$ est une somme (finie) de termes de la forme :

$$(2.\ 3)\qquad [D_y^{q_0}Q(y)][D_y^{q_1}(D_v)_1 P(v, y)] \ldots [D_y^{q_k}(D_v)_k P(v, y)].$$

Les $(D_v)_j (1 \leqslant j \leqslant k)$ sont des opérateurs différentiels sur V, dont la somme des ordres est égale à ω; $q_j \in N^n (0 \leqslant j \leqslant k)$ et $q_0 + q_1 + \cdots + q_n = p$; $k = |p| + \omega$. Remarquons que, du fait que $\deg P(v, y) = m$ (et donc $\deg Q \leqslant m$), tous les $|q_j| (0 \leqslant j \leqslant k)$ sont $\leqslant m$.

Appelons $i(h)$ la fonction, définie et à valeurs dans N, égale à 0 si $h = 0$ et à $\left[\dfrac{h-1}{m}\right] + 1$ si $h \geqslant 1$. Je dis que le nombre d'indices $j = 1, \ldots, k$ pour lesquels $q_j \neq 0$ est au moins égal à $i(|p-q_0|)$. En effet, supposons que ce nombre soit $\leqslant i(|p-q_0|)-1$. Cela signifierait que $|q_1 + \cdots + q_k| \leqslant m(i(|p-q_0|)) - m$. Mais d'après la définition, $m(i(h)-1) \leqslant h-1$, donc $|q_1 + \cdots + q_k|$ devrait être $\leqslant |p - q_0| - 1$, contrairement au fait que $q_0 + q_1 + \cdots + q_k = p$.

Appliquons maintenant le corollaire 4 de la proposition 2. 4 : il existe une constante finie B telle que, pour tout $v \in K (= \overline{U})$, tout $y \in \complement S(h)$, et tout $j = 1, \ldots, k$ pour lequel $q_j \neq 0$, on ait :

$$|D_y^{q_j}(D_v)_j P(v, y)| \leqslant B(1 + |y|^2)^{-s/2}\,|P(v, y)|.$$

Supposons d'abord $q_0 = 0$. Tenons compte de (W′), de l'inégalité précédente, et du corollaire 3 de la proposition 2.4 appliqué aux $(D_v)_j P(v, y)$ d'indices j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ pour lesquels $q_j = 0$. Nous obtenons : pour tout $v \in K$, et tout $y \in \complement S(h)$, le terme (2. 3) est majoré, en valeur absolue, par :

$$C(1 + |y|^2)^{-\frac{s}{2} i(|p|) - \frac{a}{2}}\,|P(v, y)|^{k+1} \qquad (C < \infty).$$

Supposons maintenant $q_0 \neq 0$, et d'abord $p = q_0$. Appliquons (W') et le corollaire 3 de la proposition 2. 4, cette fois pour tous les $(D_\nu)_j P(\nu, y)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Le terme (2. 3) est majoré, en valeur absolue, quels que soient $\nu \in K$ et $y \in \complement S(h)$, par :

$$C(1 + |y|^2)^{-r/2} |P(\nu, y)|^{k+1} \quad (C < \infty).$$

Remarquons que $|q_0| \leqslant m$, donc $\dfrac{|p|}{m} \leqslant 1$ dans ce cas. La quantité précédente peut être majorée par

$$C(1 + |y|^2)^{-\frac{1}{2}(r-s)-\frac{s}{2}\frac{|p|}{m}} |P(\nu, y)|^{k+1}.$$

Supposons enfin $q_0 \neq 0$ et $|p| \geqslant |q_0| + 1$; il en résulte que $i(|p - q_0|) \geqslant |p|/m$ et donc que le terme (2. 3) est majoré, en valeur absolue, pour les mêmes ν et y que précédemment, par :

$$C(1 + |y|^2)^{-\frac{s}{2}\frac{|p|}{m}-\frac{r}{2}} |P(\nu, y)|^{k+1}.$$

En prenant la réunion des trois possibilités ci-dessus, en tenant compte (pour la première) de ce que $i(|p|) \geqslant \dfrac{|p|}{m}$, on voit qu'il existe une constante finie $B \geqslant 0$ telle que, pour tout $\nu \in U$ et tout $y \in R^n$, on ait :

$$|\hat{g}(y, \nu)| \leqslant B(1 + |y|^2)^{-\frac{1}{2}\inf(a, r-s, r)-\frac{s}{2}\frac{|p|}{m}}.$$

Ceci implique que la transformée de Fourier réciproque $g(x, \nu)$ de $\hat{g}(y, \nu)$ appartient à $A^{\inf(a, r-s, r)+|p|s/m}$ (et reste bornée dans cet espace lorsque ν parcourt U). Comme

$$x^p D_\nu[Q(D)\, G(x, \nu)] = f(x, \nu) + g(x, \nu)$$

et que $p \in N^n$ et D_ν sont arbitraires, ceci prouve que $Q(D)\, G(x, \nu)$ est une fonction C^∞ de ν, dans U, à valeurs dans $(A_{\text{loc}}^{\inf(a, r-s, r), s/m})_x$.

3° *La solution élémentaire.*

Posons donc, pour $\nu \in U$, $E(x, \nu) = F(x, y) + G(x, \nu)$.

Tout d'abord, en vertu des formules (2. 1) et (2. 2), si $\psi \in \mathfrak{D}_x$:

$$< P(\nu, D)\, E(x, \nu),\ \psi(-x) > = \int_{R^n} \hat{\psi}(y)\, dy = \psi(0),$$

ce qui signifie que $P(\nu, D)\, E(x, \nu) = \delta_x$ pour tout $\nu \in U$.

D'autre part, si Q(D) est un polynôme différentiel vérifiant (W) (avec la signification de a et de r qui s'y trouve), alors Q(D) E(x, ν) est une fonction C^∞ de ν dans U, à valeurs dans $(A_{\text{loc}}^{\inf(a,\, r-s,\, r),\, s/m})_x$.

Pour obtenir le théorème 2. 1, on choisit Q(D) = 1 et, par exemple, $r = 2s$; a est pris égal à s; ceci donne $\inf(a, r-s, r) = s$. On constate que le nombre d de l'énoncé peut être pris égal à s/m. Signalons cependant que, dans de nombreux cas, par exemple celui des opérateurs elliptiques ou paraboliques, on peut améliorer cette estimation de d. Pour les elliptiques, par exemple, on peut prendre $d = 1$.

Lorsque Q(D) n'est plus forcément égal à 1, on obtient les précisions suivantes (dont la dernière partie nous sera nécessaire au chapitre III) :

SCHOLIE. — *Soit un polynôme différentiel* Q(D) *sur* R^n *tel qu'il existe* $\nu_0 \in V$, *un nombre* $a \geqslant 0$, *un nombre* $r > 0$ *et une constante positive finie* A *tels qu'on ait, pour tout* $y \in R^n$ *et tout* $p \in N^n$, $p \neq 0$:

$$(1 + |y|^2)^{a/2}\, |Q(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|),$$
$$(1 + |y|^2)^{r/2}\, |Q^{(p)}(y)| \leqslant A(1 + |P(\nu_0, y)|).$$

Soit, pour chaque $\nu \in V$, E(x, ν) *la solution élémentaire de* P$(\nu$, D) *construite dans la preuve du théorème* 2. 1. *Alors* Q(D) E(x, ν) *est une fonction* C^∞ *de* ν *dans* V, *à valeurs dans* $(A_{\text{loc}}^{\inf(a,r-s,r),\, s/m})_x$.

En particulier, si Q(D) = P$(\nu_0$, D), *les conditions précédentes sont satisfaites pour* $a = 0$, $r = s$. *Ainsi* P$(\nu_0$, D) E(x, ν) *est une fonction* C^∞ *de* ν, *dans* V, *à valeurs dans* $(A_{\text{loc}}^{0,\, s/m})_x$.

§ 4. Le problème de la réciproque du théorème principal.

Soient une variété V indéfiniment différentiable et une famille $\{P(\nu, D)\}$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur R^n, d'ordre borné et C^∞ sur V. Supposons que, pour chaque $\nu \in V$, il existe une solution élémentaire E(x, ν) de P$(\nu$, D) telle que, lorsque ν varie, ce soit une fonction indéfiniment différentiable de ν à valeurs dans un certain espace $A_{\text{loc}}^{s,d}$ avec $d > 0$. A condition de supposer V connexe, on peut légi-

timement se demander si alors la famille $\{P(\nu, D)\}$ n'est pas nécessairement formellement hypoelliptique.

La fin de ce chapitre sera presque entièrement consacrée à apporter une réponse aussi complète que possible à cette question.

Dans le présent paragraphe, nous commencerons par exhiber un contre-exemple simple, lequel montrera que, sans hypothèses supplémentaires, la réponse est négative. Ce contre-exemple suggèrera la nature de l'hypothèse à faire. Le paragraphe suivant sera entièrement consacré à la formulation précise de cette hypothèse, et à montrer qu'elle équivaut à la possibilité d'écrire les $P(\nu, D)$ sous une forme remarquable. Le paragraphe final contiendra la preuve que, sous cette hypothèse (qui concerne la dépendance par rapport à ν des $P(\nu, D)$), la réponse à notre question initiale est positive.

Nous terminerons ce § 4 en établissant deux critères qui permettent de décider si un opérateur $P(D)$ est plus fort (définition 1. 2) qu'un autre opérateur $Q(D)$. Nous aurons besoin des deux pour la preuve du théorème final.

1. Le contre-exemple.

Nous prendrons, comme variété V (avec bord !), l'intervalle fermé (0,1) muni de sa structure différentiable usuelle. Nous noterons x ou y la variable dans R^1 (suivant que nous serons côté objet ou côté image pour la transformation de Fourier). Le contre-exemple sera fourni par :

$$P\left(t, \frac{d}{dx}\right) = e^{-1/t}\frac{-1}{4\pi^2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{-1}{2\pi}\frac{d}{dx} + 1,$$

opérateur différentiel auquel se trouve associé le polynôme $P(t, y) = e^{-1/t}y^2 + iy + 1$. Pour chaque $t \in (0, 1)$, la transformée de Fourier réciproque $E(x, t)$ de $\dfrac{1}{P(t, y)}$ est une solution élémentaire de $P\left(t, \dfrac{d}{dx}\right)$; lorsque t varie, il est visible que c'est une fonction continue de t à valeurs dans A^1. Notre propos est de prouver que c'est une fonction indéfiniment dérivable de t dans (0, 1) (bord compris) à valeurs dans $A^{1/2, 1}$. Pour cela, nous nous appuierons essentiellement sur le fait que $e^{-1/t}$ a un zéro d'ordre infini en $t = 0$; et l'hypothèse qui sera

formulée au § 5 aura précisément pour but d'éviter ce genre d'accidents.

Soient m et p deux entiers $\geqslant 0$ quelconques. La transformée de Fourier de $(-2i\pi x)^p \frac{d^m}{dt^m} \mathrm{E}(x, t)$ est $\frac{d^p}{dy^p} \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{\mathrm{P}(t, y)}$. Notons $\mathrm{P}'(t, y)$ la dérivée première de $\mathrm{P}(t, y)$ par rapport à y. En tenant compte de ce que la dérivée seconde de $\mathrm{P}(t, y)$ par rapport à y est $2e^{-1/t}$, c'est-à-dire est une fonction indéfiniment dérivable de t sur $(0, 1)$, on voit qu'il existe $m+1$ polynômes $\mathrm{Q}_q(\mathrm{X})$ à une variable ($q = 0, 1, \ldots, m$) et des fonctions $\mathrm{B}_{q;\, r,\, s_r}(t)$ indéfiniment dérivables de t sur $(0, 1)$, tels qu'on puisse écrire :

$$(2.\ 4)\quad \frac{d^p}{dy^p} \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{\mathrm{P}(t, y)}$$
$$= \sum_{q=0}^{m} \mathrm{Q}_q\left(\frac{1}{t}\right) e^{-q/t} \sum_{r=0}^{\inf(p,\, 2q)} \frac{y^{3q-r}}{\mathrm{P}(t, y)^{q+1+p-r}} \sum_{s_r} \mathrm{B}_{q;\, r,\, s_r}(t)\, [\mathrm{P}'(t, y)]^{s_r}$$

où la sommation par rapport à s_r porte sur un certain ensemble d'entiers $\leqslant p - r$. De plus, si $m = 0$, $\mathrm{Q}_0(\mathrm{X}) = 1$; si $m = 1$, $\mathrm{Q}_0(\mathrm{X}) = 0$. Ceci implique que les $\mathrm{Q}_q\left(\frac{1}{t}\right) e^{-q/t}$ sont, pour tout $q = 0, 1, \ldots, m$, des fonctions continues de t sur $(0, 1)$. Si l'on se rappelle que $|\mathrm{P}(t, y)| \geqslant 1$ pour tout y réel et tout $t \in (0, 1)$, on tire de cela deux conclusions :

1° Pour tout y réel fixé, le premier membre de l'égalité (2. 4) est une fonction continue de t sur l'intervalle fermé $(0, 1)$.

2° Il existe une constante finie $\mathrm{M}(p, m)$ telle que, pour tout y réel, $|y| \leqslant 1$, et tout $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$(2.\ 5)\qquad \left| \frac{d^p}{dy^p} \frac{d^m}{dt^m} \frac{1}{\mathrm{P}(t, y)} \right| \leqslant \mathrm{M}(p, m).$$

Supposons maintenant $|y| \geqslant 1$. On a, quel que soit t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et quel que soit $|y| \geqslant 1$, $|\mathrm{P}'(t, y)| \leqslant \frac{2}{|y|} |\mathrm{P}(t, y)|$. En appliquant la formule (2. 4) pour $m = 0$, on voit que, pour ces mêmes t et y, on a :

$$(2.\ 6)\qquad \left| \frac{d^p}{dy^p} \frac{1}{\mathrm{P}(t, y)} \right| \leqslant \frac{\mathrm{A}(p)}{|y|^p} \frac{1}{|\mathrm{P}(t, y)|} \qquad (\mathrm{A}(p) < +\infty).$$

D'autre part, quels que soient y réel et $t \in (0, 1)$, on a $e^{-1/t}y^2 \leqslant |P(t, y)|$. On déduit alors de (2. 4) qu'il existe, si $m \geqslant 1$, un entier $\mu(m)$ et une constante finie $A(p, m)$ tels qu'on ait, pour tout y réel, $|y| \geqslant 1$, et tout $t > 0$:

$$(2.\ 7) \qquad \left|\frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{P(t, y)}\right| \leqslant A(p, m)\frac{1}{t^{\mu(m)}}\frac{1}{|y|^p}\frac{e^{-1/t}y^2}{|P(t, y)|^2}.$$

Je dis que, quel que soit l'entier $\mu \geqslant 0$, il existe une constante finie $B(\mu)$ telle que, pour tout $0 < t \leqslant 1$ et tout y réel, $|y| \geqslant 1$, on ait :

$$(2.\ 8) \qquad e^{-1/t}y^2 \leqslant B(\mu)\, t^\mu |P(t, y)|^{3/2}.$$

Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons que, pour tout entier k, il existe y_k réel, $|y_k| \geqslant 1$, et $t_k \in (0, 1)$, tels que $e^{-1/t}y_k^2 \geqslant kt_k^\mu |P(t_k, y_k)|^{3/2}$. On peut supposer que les t_k convergent vers 0, car si on avait $t_k \geqslant c > 0$ pour tout k, cette inégalité impliquerait $|P(t_k, y_k)| \geqslant kc^\mu |P(t_k, y_k)|^{3/2}$, donc

$$1 \geqslant kc^\mu |P(t_k, y_k)|^{1/2} \geqslant kc^\mu,$$

ce qui est absurde. Tenons alors d'abord compte du fait que $|P(t, y)| \geqslant |y|$ (quels que soient y et t). On en déduit, pour tout k :

$$|y_k|^{1/2} \geqslant kt_k^\mu e^{1/t_k}.$$

Tenons maintenant compte de ce que $|P(t, y)| \geqslant e^{-1/t}y^2$ (pour tous y et t). On en déduit, pour tout k :

$$1 \geqslant kt_k^\mu e^{-\frac{1}{2t_k}}|y_k|.$$

Or, pour k assez grand (et donc t_k assez petit), ces deux inégalités sont incompatibles.

En tenant compte de (2. 8) dans l'inégalité (2. 7), on voit qu'il existe une constante $A'(p, m)$ finie, telle que, pour tout $t > 0$ et tout y réel, $|y| \geqslant 1$,

$$(2.\ 9) \qquad |P(t, y)|^{1/2}\, |y|^p \left|\frac{d^p}{dy^p}\frac{d^m}{dt^m}\frac{1}{P(t, y)}\right| \leqslant A'(p, m).$$

Mais d'après la continuité du 1er membre par rapport à t, sur $(0, 1)$, lorsqu'on fixe y, cette inégalité reste vraie pour tout $t \in (0, 1)$. D'autre part, en tenant compte de (2. 6), moyennant

éventuellement un nouveau choix de $A'(m, p)$, on voit qu'elle est vraie aussi lorsque $m = 0$. Enfin, en tenant compte de (2. 5), et du fait que si $|y| \leqslant 1$, $|P(t, y)| \leqslant 3$ (quel que soit t, $0 \leqslant t \leqslant 1$), on voit qu'on peut choisir $A'(m, p)$ de sorte que (2. 9) soit vraie aussi pour tout $|y| \leqslant 1$, autrement dit on peut faire ce choix de sorte que (2. 9) soit vraie pour tout y réel et tout $t \in (0, 1)$. Comme enfin $|P(t, y)|^{1/2} \geqslant (1 + y^2)^{1/4}$, ceci prouve exactement que $E(x, t)$ est une fonction indéfiniment dérivable de t sur $(0, 1)$ à valeurs dans $A^{1/2, 1}$.

2. Les critères de comparaison de deux polynômes différentiels.

Lemme 2. 1. — *Soient* $P(D)$, $Q(D)$ *deux polynômes différentiels sur* R^n. *On suppose* $P(D)$ *hypoelliptique et qu'il existe un ouvert* Ω *non vide de* R^n *ayant la propriété suivante : il existe une constante finie* M *telle que, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *on ait :* $\|Q(D)\varphi\|_{L^2} \leqslant M\|P(D)\varphi\|_{L^2}$. *Alors* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$.

Résulte immédiatement du théorème 2. 2 et du lemme 3. 5 de Hörmander [1].

Pour le deuxième critère de comparaison, nous nous appuierons encore sur un résultat d'Hörmander ([2], théorème 3. 2), dont voici l'énoncé :

Soient $P(D)$, $Q(D)$ deux polynômes différentiels sur R^n; $P(D)$ est hypoelliptique. L'ensemble des nombres positifs q possédant la propriété suivante : il existe une constante finie C_q telle que, pour tout $y \in R^n$, $|Q(y)| \leqslant C_q(1 + |P(y)|)^q$, cet ensemble n'est pas vide et possède un élément minimal (pour l'ordre naturel sur l'ensemble des nombres positifs).

Nous pouvons alors énoncer notre deuxième critère :

Lemme 2. 2. — *Soient* $P(D)$, $Q(D)$ *deux polynômes différentiels sur* R^n. *On suppose que* $P(D)$ *est hypoelliptique et qu'il existe deux suites strictement croissantes d'entiers positifs* $\{n_k\}$, $\{m_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *avec les propriétés suivantes : pour tout* k, $Q(D)^{n_k}$ *est plus faible que* $P(D)^{m_k}$ *et, lorsque* $k \to +\infty$, n_k/m_k *tend vers* 1. *Dans ces conditions,* $Q(D)$ *est plus faible que* $P(D)$.

En effet, nos conditions impliquent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante finie C_ε telle que, pour tout $y \in R^n$, $|Q(y)| \leqslant C_\varepsilon(1 + |P(y)|)^{1+\varepsilon}$.

§ 5. Familles de type analytique.

Dans tout ce paragraphe, V sera supposée *connexe*. Comme de coutume, $\mathcal{E}_v$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V (à valeurs complexes).

Définition 2. 7. — *Un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{E}_v$ *sera dit de type analytique si toute fonction appartenant à ce sous-espace et admettant un zéro d'ordre infini en un point de* V *est identiquement nulle sur* V.

Si V est analytique réelle, tout espace de fonctions analytiques ou quasi-analytiques sur V est de type analytique. Mais il faut insister sur le fait suivant : la définition 2. 7 ne concerne pas seulement les éléments d'un espace de type analytique pris individuellement, mais aussi le fait, pour ceux-ci d'appartenir simultanément au dit espace. Plus précisément, deux fonctions de $\mathcal{E}_v$ peuvent appartenir séparément à deux espaces de type analytique différents, sans qu'il existe d'espace de type analytique qui les contienne toutes les deux. Par exemple, le sous-espace vectoriel à une dimension de $\mathcal{E}_v$ engendré par la fonction $1 + \exp(-1/t^2)$ (ici V est la droite réelle) est de type analytique, de même, évidemment, que celui engendré par la fonction 1. Mais tout espace vectoriel contenant à la fois 1 et $1 + \exp(-1/t^2)$ contient aussi la fonction $\exp(-1/t^2)$ donc n'est en aucun cas de type analytique. Cet exemple montre aussi que les éléments d'un espace de type analytique peuvent n'avoir aucune propriété d'analyticité ou de quasi-analyticité. Mais, dans l'espace de type analytique dans lequel on les considère, la donnée de toutes leurs dérivées en un point quelconque les détermine complètement; c'est sur ce fait que nous allons nous appuyer.

Définition 2. 8. — *Soient un espace vectoriel de dimension finie* E *et une fonction* $\vec{f}(v)$ *définie sur* V, *à valeurs dans* E. *Nous dirons que* $\vec{f}(v)$ *est de type analytique sur* V *si, lorsque* $\overleftarrow{e'}$ *parcourt le dual de* E, *l'ensemble des fonctions scalaires* $\langle \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} \rangle$ *constitue un espace de type analytique.*

Nous dirons que $\vec{f}(v)$ *est de type analytique en un point* v_0

de V s'il existe un voisinage ouvert de ce point sur lequel $\vec{f}(v)$ soit de type analytique.

Dire que $\vec{f}(v)$ est de type analytique équivaut à dire, manifestement, que les composantes de $\vec{f}(v)$ par rapport à une base quelconque de E engendrent un espace de type analytique. Remarquons qu'une fonction scalaire de type analytique est tout simplement une fonction indéfiniment différentiable sans zéro d'ordre infini (à moins que ce ne soit la fonction 0 !).

Nous pouvons maintenant parler de familles d'opérateurs différentiels sur R^n à coefficients constants, de type analytique sur V, pourvu qu'il s'agisse de familles d'ordre borné. Ce sera précisément là notre hypothèse :

(TA) $\{P(v, D)\}$ *est une famille d'ordre borné et de type analytique sur* V.

Toute la suite de la démonstration va montrer l'intérêt de cette condition.

LEMME 2. 3. — *Soient r suites $\beta_j = (b_{j,\mu})$ $(j = 1, \ldots, r$; $\mu = 0, 1, \ldots)$ de nombres complexes, linéairement indépendantes sur* C. *On peut trouver r entiers ≥ 0 $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tels que la matrice (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r)$ soit inversible.*

Nous raisonnerons par récurrence sur r, le résultat étant trivial pour $r = 1$. Supposons-le vrai pour $r - 1$. Comme les suites $\beta_j (1 \leq j \leq r - 1)$ sont linéairement indépendantes, il existe une matrice $(r - 1) \times (r - 1)$ (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r - 1)$ inversible. Considérons alors la matrice :

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{1,\mu_1} & \cdots & b_{1,\mu_{r-1}} & b_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{r-1,\mu_1} & \cdots & b_{r-1,\mu_{r-1}} & b_{r-1,k} \\ b_{r,\mu_1} & \cdots & b_{r,\mu_{r-1}} & b_{r,k} \end{pmatrix}$$

où k peut prendre toutes les valeurs entières ≥ 0. Si dét $B_k = 0$, c'est qu'il existe une combinaison linéaire non triviale des lignes qui est nulle; dans cette combinaison linéaire, le coefficient de la dernière ligne ne peut être nul, sinon il existerait une combinaison linéaire non triviale des $r - 1$ premières lignes nulle, contrairement au fait que la matrice (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r - 1)$ est inversible. Autrement dit, si dét $B_k = 0$, il existe $r - 1$ nombres complexes c_k^j non tous

nuls tels que $b_{r,\mu_i} = \sum_{j=1}^{r-1} c_k^j b_{j,\mu_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ (avec $\mu_r = k$). Mais il existe certainement au moins deux entiers k et k' tels que les systèmes (c_k^j) et $(c_{k'}^j)$ soient distincts, sinon cela voudrait dire que la suite β_r est combinaison linéaire des suites β_j $(1 \leqslant j \leqslant r-1)$, contrairement à l'hypothèse. Si donc on avait dét $B_k =$ dét $B_{k'} = 0$, on devrait avoir notamment pour tout $i = 1, \ldots, r-1$:

$$b_{r,\mu_i} = \sum_{j=1}^{r-1} c_k^j b_{j,\mu_i} = \sum_{j=1}^{r-1} c_{k'}^j b_{j,\mu_i}.$$

Mais le fait que la matrice (b_{j,μ_i}) $(i, j = 1, \ldots, r-1)$ soit inversible exige $c_k^j = c_{k'}^j$ pour tout $j = 1, \ldots, r-1$. Par conséquent, on ne peut avoir dét $B_k = 0$ et dét $B_{k'} = 0$.

C.Q.F.D.

LEMME 2. 4. — *Supposons* V *connexe. Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $\vec{f}(v)$ *une fonction définie dans* V, *à valeurs dans* E. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\vec{f}(v)$ *est de type analytique sur* V.

b) *Pour tout point* $v_0 \in$ V, *il existe une famille finie d'opérateurs différentiels* $(D_v)_j$ *opérant au voisinage de* v_0 *et une famille finie de fonctions* $a_j(v) \in \mathcal{E}_v$ $(j = 1, \ldots, r)$ *tels qu'on ait, pour tout* $v \in$ V :

$$\vec{f}(v) = \sum_{j=1}^{r} a_j(v)\left[(D_v)_j \vec{f}\right](v_0).$$

De plus, si l'on choisit les $(D_v)_j$ *de manière à ce que les vecteurs* $\left[(D_v)_j \vec{f}\right](v_0)$ *soient linéairement indépendants et que les fonctions* $a_j(v)$ *soient linéairement indépendantes, le nombre* r *est indépendant du point* v_0 (et évidemment, il existe un espace de type analytique qui contient toutes les a_j).

Supposons $\vec{f}(v)$ de type analytique sur V. Il existe μ vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_\mu$ de E et μ fonctions $b_1(v), \ldots, b_\mu(v)$ de $\mathcal{E}_v$ tels que

$$\vec{f}(v) = \sum_{j=1}^{\mu} b_j(v)\vec{e}_j,$$

et il existe un espace de type analytique qui contient toutes les $b_j(v)$; on peut évidemment s'arranger pour que les vecteurs $\vec{e}_j$ et, d'autre part, les fonctions b_j, soient linéairement indépendants; dans ce cas, l'entier μ prend sa valeur mini-

mum, que nous noterons r. Soit v_0 arbitraire dans V; donnons-nous un système de coordonnées locales au voisinage de v_0, ce qui nous permet de manipuler les monômes de dérivation D_v^p par rapport à ces coordonnées (p parcourt un certain espace N^ν, que nous ordonnerons totalement d'une façon arbitraire). Appelons β_j la suite $(D_v^p b_j(v_0))$ $(p \in N^\nu)$ pour chaque $j = 1, \ldots, r$. Puisque les fonctions b_j sont linéairement indépendantes dans un même espace de type analytique, les suites β_j doivent être linéairement indépendantes. Nous pouvons appliquer le lemme 2. 3 : il existe r indices $p_1, \ldots, p_r$ tels que la matrice $r \times r$ $(D_v^{p_i} b_j(v_0))$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ soit inversible. Or on a :

$$D_v^{p_i}\vec{f}(v_0) = \sum_{j=1}^{r} D_v^{p_i} b_j(v_0)\vec{e}_j \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Ceci permet d'exprimer les $\vec{e}_j$ en fonction des $D_v^{p_i}\vec{f}(v_0)$ (lesquels sont linéairement indépendants : cela montre qu'alors r ne dépend pas de v_0). On conclut aussitôt à (b).

Supposons maintenant (b) vérifié et, en même temps, que $\vec{f}(v)$ ne soit pas de type analytique, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire $\overleftarrow{e'}$ sur E telle que $< \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} >$ admette un zéro d'ordre infini en un point v_0 de V, sans être nulle en tout point de V. Prenons alors l'expression de $\vec{f}(v)$ qui figure dans (b), relativement au point v_0 en question. Elle permet d'écrire :

$$\begin{aligned} < \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} > &= \sum_{j=1}^{r} a_j(v) < (D_v)_j \vec{f}(v_0), \overleftarrow{e'} > \\ &= \sum_{j=1}^{r} a_j(v) [(D_v)_j < \vec{f}(v), \overleftarrow{e'} >]_{v=v_0} = 0 \end{aligned}$$

et ceci est vrai quel que soit $v \in V$. Nous avons abouti à une contradiction.

§ 6. Démonstration et énoncé de la réciproque partielle du théorème principal.

Notre hypothèse sera donc que la famille $\{P(v, D)\}$ vérifie (TA). Nous servant de ceci et du lemme 2. 4, nous pourrons écrire, pour tout point v_0 de V :

$$P(v, D) = \sum_{j=1}^{r} a_j(v) [(D_v)_j P(v, D)]_{v=v_0},$$

où les $a_j(\nu) \in \mathcal{E}_\nu$ et où les $(D_\nu)_j$ sont des opérateurs différentiels sur un voisinage de ν_0. Nous utiliserons ensuite l'existence d'une solution élémentaire $E(x, \nu)$ de $P(\nu, D_x)$ de classe C^∞ en ν, à valeurs dans un espace $A_{loc}^{s,d}$ $(d > 0)$, et les lemmes 2. 1, 2. 2, 2. 4, pour prouver que les $(D_\nu)_j P(\nu_0, D)$ sont plus faibles que $P(\nu_0, D)$. D'après l'expression précédente, cela entraîne que, pour tout $\nu \in V$, $P(\nu, D)$ est plus faible que $P(\nu_0, D)$ et donc, puisque ν_0 est arbitraire dans V, que la famille $\{P(\nu, D)\}$ est formellement hypoelliptique.

1. Hypothèses provisoires.

Outre à (TA), nous ferons l'hypothèse suivante :

Il existe un élément $G(x, \nu)$ de $\mathcal{E}_\nu(\mathcal{D}'_x)$ pourvu des propriétés suivantes :

1° *Il existe un compact* K *de* R^n *tel que, pour tout* $\nu \in V$, *la distribution en* x $G(x, \nu)$ *ait son support dans* K.

Il résulte aussitôt de ceci que $T(x) \to G(x, \nu) * T(x)$ ($*$ désigne la convolution par rapport à x) est (pour chaque $\nu \in V$) une application linéaire continue de $\mathcal{D}'_x$ dans lui-même, et, lorsque ν varie dans V, c'est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x)$. On a, pour toute $T(x) \in \mathcal{D}'_x$ et tout opérateur différentiel D_ν sur V :

$$D_\nu[G(x, \nu) * T(x)] = [D_\nu G(x, \nu)] * T(x).$$

Nous supposerons que $G(x, \nu)$ possède aussi la propriété suivante :

2° *Pour tout ouvert borné* Ω *de* R^n, $f(x) \to G(x, \nu) * f(x)$ *définit un opérateur borné, que nous noterons* $G(\nu)$, *de* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(R^n)$, *et* $G(\nu)$ *est une fonction* C^∞ *de* ν *à valeurs dans* $L_b(L^2(\Omega); L^2(R^n))$. *Si* D_ν *est un opérateur différentiel sur* V, *on a, pour toute* $f \in L^2(\Omega)$ $D_\nu G(\nu).f = [D_\nu G(x, \nu)] * f(x)$.

Enfin, $G(x, \nu)$ vérifiera la condition suivante :

3° $P(\nu, D_x)\, G(x, \nu) - \delta_x$ *est une fonction* $L(x, \nu)$ C^∞ *de* ν *à valeurs dans* $(\mathcal{D}_K)_x$.

2. Construction de l'algèbre $\mathcal{C}$.

Considérons $\mathcal{E}_\nu(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$ comme muni de sa structure naturelle d'algèbre sur le corps des complexes. Nous appellerons $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{E}_\nu(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$ engendrée par l'application identique de $\mathcal{D}'_x$ sur lui-même, et par l'ensemble des

opérateurs de convolution $D_v G(x, \nu) *$, D_v parcourant l'ensemble de tous les opérateurs différentiels sur V. Il est manifeste que $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative, avec unité.

Soit Ω un ouvert borné quelconque de R^n.

I. *On peut identifier* $\mathcal{A}$ *à un sous-espace vectoriel de*

$$\mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega);\ L^2(R^n))).$$

En effet, donnons-nous une famille finie quelconque

$$\{(D_v)_i\}\ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

d'opérateurs différentiels sur V. Les propriétés de $G(x, \nu)$ font qu'on peut trouver s ouverts bornés Ω_i de R^n, avec $\Omega_1 = \Omega$, tels que, pour chaque $i \leqslant s - 1$,

$$(D_v)_i G(\nu) \in \mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega_i);\ L^2(\Omega_{i+1})))$$

et que $(D_v)_s G(\nu) \in \mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega_s);\ L^2(R^n)))$ de sorte que la composée $[(D_v)_s G(\nu)] \circ [(D_v)_{s-1} G(\nu)] \circ \cdots \circ [(D_v)_1 G(\nu)]$ définit un élément de $\mathcal{E}_v(L_b(L^2(\Omega);\ L^2(R^n)))$.

Considérons maintenant les $D'_v P(\nu, D)$ (D'_v : opérateur différentiel sur V) ; ce sont des éléments de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x;\ \mathcal{D}'_x))$. Lorsque D'_v parcourt l'ensemble des opérateurs différentiels sur V, la réunion de l'ensemble des $D'_v P(\nu, D)$ et de $\mathcal{A}$ engendre une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x;\ \mathcal{D}'_x))$. Il est clair que $\mathcal{B}$ est une algèbre commutative (sur C), avec unité ; $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$.

Soit de nouveau Ω un ouvert borné quelconque de R^n.

II. *On peut identifier* $\mathcal{B}$ *à un sous-espace vectoriel de*

$$\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ L^2(R^n))).$$

En effet, donnons-nous deux familles finies quelconque $\{(D_v)_i\}$, $\{(D'_v)_j\}$ $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, s')$ d'opérateurs différentiels sur V. Il est évident que

$$[(D'_v)_{s'} P(\nu, D)] \circ \cdots \circ [(D'_v)_1 P(\nu, D)]$$

définit un élément de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ \mathcal{D}(\Omega)))$. Il résulte alors de (I) que

$$[(D_v)_s G(\nu)] \circ \cdots \circ [(D_v)_1 G(\nu)] \circ [(D'_v)_{s'} P(\nu,\ D)] \circ \cdots \circ [(D_v)_1 P(\nu,\ D)]$$

définit bien un élément de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ L^2(R^n)))$.

Soit $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de x, à support compact, à valeurs dans l'espace des fonctions C^∞ de v. Insistons sur le fait suivant : si $g(x, v) \in \tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v)$, il existe un compact H de R^n (dépendant de g) tel que $g(x, v)$ ait (en tant que fonction de x), pour tout $v \in V$, son support dans H.

Faisons opérer $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ par convolution (en x) sur $\mathcal{D}'_x$, ce qui le plonge dans $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$. On voit immédiatement que $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}$ est un idéal de $\mathcal{B}$. Nous noterons $\mathcal{C}$ l'algèbre quotient $\mathcal{B}/[\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}]$ et $B \to \dot{B}$ la projection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$. Évidemment, $\mathcal{C}$ est une algèbre (sur C), commutative, avec unité (notée $\dot{I}$). L'image $\dot{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ par la projection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}$ contenant l'unité.

Tout opérateur différentiel D_v sur V applique l'idéal $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}$ dans lui-même, car il applique $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ (resp. $\mathcal{B}$) dans lui-même. Par conséquent, D_v définit, par passage au quotient, une application linéaire $\dot{D}_v$ de $\mathcal{C}$ dans lui-même.

Pour simplifier, nous écrirons G au lieu de $G(x, v)\,*$ (opérateur de convolution sur $\mathcal{D}'_x$) et P au lieu de $P(v, D)$; G et P sont des éléments de $\mathcal{B}$.

$$\text{(III)} \qquad \dot{G}\dot{P} = \dot{I}.$$

Cela résulte trivialement de la propriété 3° de $G(x, v)$. Il s'ensuit que si L_v est un champ de dérivations C^∞ sur V, on aura, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} (\dot{L}_v^{p-q}\dot{G})(\dot{L}_v^q\dot{P}) = 0.$$

3. L'algèbre $\mathcal{C}_0$.

Soit v_0 un point arbitraire de V. A tout $U(v) \in \mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$ nous pouvons faire correspondre sa valeur $U(v_0)$ en v_0 qui est un élément de $L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x)$ et $U(v) \to U(v_0)$ est homomorphisme, pour les structures d'algèbres sur C, de $\mathcal{E}_v(L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x))$ sur $L_b(\mathcal{D}'_x; \mathcal{D}'_x)$. Appelons-le « valeur en v_0 ». Il applique $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v)$ sur $\mathcal{D}_x$ (ces deux espaces opérant convolutivement sur $\mathcal{D}'_x$).

Nous noterons $\mathcal{A}_0$ (resp. $\mathcal{B}_0$) l'image de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) par l'homomorphisme valeur en v_0. Il est clair que $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}_0$ sont deux

algèbres commutatives avec unité. De (I) et de (II) résulte naturellement :

(I_0) *On peut identifier* $\mathcal{A}_0$ *à un sous-espace vectoriel de* $L_b(L^2(\Omega); L^2(R^n))$.

(II_0) *On peut identifier* $\mathcal{B}_0$ *à un sous-espace vectoriel de* $L_b(\mathcal{D}(\Omega); L^2(R^n))$.

Les faits suivants sont triviaux : $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{B}_0$ est l'image par la valeur en v_0 de $\tilde{\mathcal{D}}_x(\mathcal{E}_v) \cap \mathcal{B}$ et est donc un idéal de $\mathcal{B}_0$; appelons $\mathcal{C}_0$ l'algèbre quotient $\mathcal{B}_0/(\mathcal{D}_x \cap \mathcal{B}_0)$; l'homomorphisme « valeur en v_0 » induit un homomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$ que nous noterons $\dot{B} \to \dot{B}_0$. Bien entendu, $\mathcal{C}_0$ est une algèbre commutative, avec unité (notée $\dot{I}_0$) ; $\dot{\mathcal{A}}_0$, image de $\dot{\mathcal{A}}$ par l'homomorphisme $\dot{B} \to \dot{B}_0$ ou bien image de $\mathcal{A}_0$ par la projection canonique de $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{C}_0$, est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0$ qui contient l'unité.

De (III) et (IV) résulte qu'on a, dans $\mathcal{C}_0$, les équations suivantes :

$$(E_0) \qquad \dot{G}_0\dot{P}_0 = \dot{I}_0.$$

$$(E_p) \qquad \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} (\dot{L}_v^{p-q}\dot{G})_0(\dot{L}_v^q\dot{P})_0 = 0, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Dans $\mathcal{C}_0$ se produit un fait important (qui en général n'a pas d'équivalent dans $\mathcal{C}$) ; c'est le suivant :

(V) *Lorsque* D_v *parcourt l'ensemble des opérateurs différentiels sur* V, *les éléments* $(\dot{D}_v\dot{P})_0$ *engendrent un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}_0$ *dont la dimension est finie.*

Cela résulte de l'hypothèse (TA). En effet, d'après la formule du début de ce paragraphe, on a :

$$[D_vP(v, D)]_{v=v_0} = \sum_{j=1}^{r} [D_va_j(v)]_{v=v_0}[(D_v)_jP(v, D)]_{v=v_0},$$

et ceci signifie que le sous-espace vectoriel engendré par les $[D_vP(v, D)]_{v=v_0}$ dans $\mathcal{B}_0$ admet les $[(D_v)_jP(v, D)]_{v=v_0}$ ($j = 1, \ldots, r$) comme générateurs et est donc de dimension finie. Il doit en être de même du sous-espace engendré dans $\mathcal{C}_0$ par les $(\dot{D}_v\dot{P})_0$.

En particulier, si l'on se donne un champ de dérivations C^∞ L_v sur V, le sous-espace vectoriel engendré dans $\mathcal{C}_0$ par les $(\dot{L}_v^k\dot{P})_0$ ($k = 0, 1, \ldots$) est de dimension finie. C'est ce fait que nous allons maintenant chercher à exploiter. Cela nous sera possible grâce au lemme algébrique du numéro suivant.

4. Un lemme algébrique.

Soit $\mathfrak{C}$ une algèbre sur le corps des complexes, commutative, avec unité (notée 1).

Lemme 2. 5. — *Considérons deux suites d'éléments de* $\mathfrak{C}$, (a_h), (b_k) $(h, k = 0, 1, \ldots)$, *vérifiant les relations suivantes :*

(e_0) $$a_0 b_0 = 1;$$

(e_p) $$\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} a_{p-q} b_q = 0, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Désignons par $\mathfrak{A}$ *la sous-algèbre de* $\mathfrak{C}$ *engendrée par* 1 *et par les* $a_h (h = 0, 1, \ldots)$ *et supposons que le sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{C}$ *engendré par les* $b_k (k = 0, 1, \ldots)$ *soit de dimension finie.*

Dans ces conditions, il existe un entier $m \geqslant 0$ *qui jouit des propriétés suivantes :*

Pour tout entier $n > 0$ *et tout élément* $(r_1, \ldots, r_{m+n})$ *de* N^{m+n} *et tout élément* $(s_1, \ldots, s_n)$ *de* N^n, *l'élément* $a_{r_1} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \ldots b_{s_n}$ *de* $\mathfrak{C}$ *appartient à* $\mathfrak{A}$.

La démonstration de ce lemme étant assez longue et parfaitement hétérogène au reste de ce travail, il nous a paru préférable de la renvoyer en appendice (voir Appendice I). En réalité, nous utiliserons le corollaire suivant du lemme 2. 5 (corollaire plus simple que le lemme 2. 5 mais que nous avons été incapable de démontrer directement) :

Corollaire 1. — *Avec les mêmes notations et sous les mêmes conditions que pour le lemme* 2,5, *et si* m *est l'entier qui figure dans le lemme* 2,5, *on a, pour tout entier* $k \geqslant 0$, *et tout entier* $n \geqslant 1$, $a_0^m b_k^n \in \mathfrak{A}$.

5. Utilisation du lemme algébrique.

Il est clair que nous allons appliquer le lemme 2. 5, en prenant : pour l'algèbre $\mathfrak{C}$, $\mathcal{C}_0$; pour éléments $a_h (h = 0, 1, \ldots)$, les $(\dot{\mathrm{L}}_v^h \dot{\mathrm{G}})_0$; pour éléments $b_k (k = 0, 1, \ldots)$, les $(\dot{\mathrm{L}}_v^k \dot{\mathrm{P}})_0$. Des équations (E_0) et (E_p) $(p = 1, 2, \ldots)$ et de la propriété (V), résulte que toutes les hypothèses du lemme 2. 5 sont satisfaites. Nous pouvons donc en appliquer le corollaire 1 :

(VI). *Il existe un entier* $m \geqslant 0$ *tel que, pour tous* $k, r \in \mathrm{N}$, $\dot{\mathrm{G}}_0^{m+r} (\dot{\mathrm{L}}_v^k \dot{\mathrm{P}})_0^r \in \mathfrak{A}_0$.

Remontons de C_0 à $\mathcal{B}_0$; (VI) signifie que $G_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r \in \mathcal{A}_0$ mod $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{B}_0$, ou encore, qu'il existe $A_{k,r} \in \mathcal{A}_0$ et $\varphi_{k,r} \in \mathcal{D}_x$ tels que $\mathcal{C}_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r = A_{k,r} + \varphi_{k,r}*$.

Reprenons l'ouvert Ω (borné, non vide) dans R^n; il est clair que $\varphi_{k,r}*$ définit (par prolongement de $\mathcal{D}(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$) un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(R^n)$. En vertu de (I_0), $A_{k,r} \in L_b(L^2(\Omega);\ L^2(R^n))$. Ces deux faits impliquent que $G_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r$, *a priori* dans $L_b(\mathcal{D}(\Omega);\ L^2(R^n))$ d'après (II), définit en réalité un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(R^n)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante finie $M_{k,r}$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on ait :

$$(2.10) \qquad \|G_0^{m+r}(L_v^k P)_0^r \varphi\|_{L^2} \leqslant M_{k,r} \|\varphi\|_{L^2}.$$

Prenons $\varphi = P_0^{m+r}\psi$; puisque $\dot{P}_0 \dot{G}_0 = \dot{I}_0$, il existe $\varphi_r \in \mathcal{D}_x$ tel que $G_0^{m+r}P_0^{m+r} = I_0 + \varphi_r *$, soit $G_0^{m+r}\varphi = \psi + \varphi_r * \psi$, et donc, d'après (2.10) :

$$(2.11) \qquad \|(L_v^k P)_0^r \psi\|_{L^2} \leqslant M_{k,r} \|P_0^{m+r}\psi\|_{L^2} + \|\chi * \psi\|_{L^2}, \qquad \chi \in \mathcal{D}_x,$$

ceci étant vrai pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mais puisque Ω est borné (et que P_0 n'est pas nul) il existe (cf. lemme 2. 7 de Hörmander [1]) une constante finie M'_r telle que, pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\|\chi * \psi\|_{L^2} \leqslant M'_r \|P_0^{m+r}\psi\|_{L^2}$. Compte tenu de ceci et de (2. 11), on voit qu'il existe une constante finie $M'_{k,r}$ telle que, pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on ait :

$$\|(L_v^k P(v_0, D))^r \psi\|_{L^2} \leqslant M'_{k,r} \|P(v_0, D)^{m+r}\psi\|_{L^2}.$$

Alors l'application du lemme 2. 1 permet de déduire de cette majoration que $(L_v^k P(v_0, D))^r$ est plus faible que $P(v_0, D)^{m+r}$. Comme ceci est vrai pour tout $r \in N$, le lemme 2. 2 permet d'affirmer que $L_v^k P(v_0, D)$ est plus faible que $P(v_0, D)$. Ceci est vrai pour tout entier $k \geqslant 0$, et aussi pour tout champ de dérivations $C^\infty L_v$ sur V.

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 2. 6. — *Soit un voisinage ouvert* $U(v_0)$ *quelconque de* $v_0 \in V$; *soit* D_v *un opérateur différentiel sur* $U(v_0)$. *Il existe une famille finie* $\{(L_v)_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ *de champs de dérivations* C^∞ *sur* V, *un nombre égal d'entiers* $\geqslant 0$, $k_1, \ldots, k_M$, *un nombre égal de fonctions de* $\mathcal{E}(V)$, $g_1(v), \ldots, g_M(v)$, *et un voisi-*

nage ouvert $U'(\nu_0)$ *de* ν_0, *inclus dans* $U(\nu_0)$, *tels qu'on ait, sur* $U'(\nu_0)$:

$$D_\nu = \sum_{i=1}^{M} g_i(\nu)\,(L_\nu)_i^{k_i}.$$

Bornons-nous à esquisser la démonstration. Le résultat est purement local et nous pouvons donc nous ramener à un voisinage ouvert de l'origine dans R^ν (ν étant la dimension de V). Étant donné un système de coordonnées cartésiennes $x_1, \ldots, x_\nu$ dans R^ν, il suffit de démontrer le résultat pour les monômes de dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{p_\nu}$. Il suffit de démontrer que tout monôme $X_1^{p_1} \ldots X_\nu^{p_\nu}$ (en ν indéterminées) peut se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{M} g_i L_i^{k_i}(X_1, \ldots, X_\nu)$, où ici les g_i sont des nombres réels et les L_i des formes linéaires réelles sur R^ν. Ce résultat est trivial pour $|p| = p_1 + \cdots + p_\nu = 0$ ou 1 (les k_i peuvent être nuls !). En raisonnant par récurrence sur $|p|$, on est immédiatement ramené à prouver le résultat pour $\nu = 2$ et pour le monôme $X_1X_2^{m-1}$. Il est possible de déterminer $m+1$ nombres réels ξ^j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ tels que $X_1X_2^{m-1} = \sum_{j=0}^{m} \xi^j(X_1 + jX_2)^m$. En effet, les ξ^j doivent alors vérifier le système d'équations linéaires

$$\sum_{j=0}^{M} j^p\xi^j = \begin{cases} 0 \text{ si } p = 0, 1, \ldots, m-2, m \text{ (on convient que } 0^0 = 1). \\ \dfrac{1}{m} \text{ si } p = m-1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que le déterminant de ce système d'équations est non nul (c'est le déterminant de Vandermonde $V(0, 1, \ldots, m)$).

Du lemme 2. 6 et de la conclusion à laquelle nous étions parvenus juste avant ce lemme, on conclut que pour tout opérateur différentiel D_ν défini au voisinage de ν_0, $D_\nu P(\nu_0, D)$ est plus faible que $P(\nu_0, D)$ ce qui démontre ce que nous désirions (sous nos hypothèses provisoires).

6. Espaces H^s, H^s_c, H^s_{loc}.

Afin d'obtenir une généralité satisfaisante dans l'énoncé du théorème que nous avons en vue, nous sommes obligés

d'introduire de nouveaux espaces fonctionnels, d'ailleurs presque classiques dans la littérature. Soit $r \in \mathrm{R}$ quelconque. Voici, en bref, les définitions dont nous avons besoin :

H^r : espace des distributions tempérées $f(x)$ dont la transformée de Fourier $\hat{f}(y)$ est une fonction de carré sommable pour la mesure $(1+|y|^2)^r dy$; H^r est muni du produit hermitien $\int \hat{f}(y)\, \overline{\hat{g}(y)}\, (1+|y|^2)^r dy$, qui en fait un espace hilbertien.

$\mathrm{H}^r_{\mathrm{K}}$: espace formé des éléments de H^r qui ont leur support dans le compact K de R^n, muni de la topologie induite par H^r.

H^r_c : limite inductive (au sens vectoriel-topologique) des espaces $\mathrm{H}^r_{\mathrm{K}}$ lorsque K parcourt la famille de tous les compacts de R^n.

$\mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}}$: espace des distributions $f(x)$ sur R^n telles que $\alpha f \in \mathrm{H}^r$ pour toute $\alpha \in \mathcal{D}$; $\mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}}$ est muni de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $f \to \alpha f$ (α parcourant $\mathcal{D}$) de $\mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}}$ dans H^r_c.

Pour une étude détaillée de ces espaces, voir par exemple Malgrange [2]. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2. 7. — *Soient deux réels quelconques r, s; $(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $\mathrm{A}^r \times \mathrm{H}^s$ dans H^{r+s}.*

Preuve directe très simple. Notons $\| \|_\sigma$ la norme dans H^σ. On a :

$$\| f * g \|_{r+s} = \| (1+|y|^2)^r f(y)\, (1+|y|^2)^s \hat{g}(y) \|_{\mathrm{L}^2_y} \leqslant$$
$$\| (1+|y|^2)^r \hat{f}(y) \|_{\mathrm{L}^\infty_y} \times \| (1+|y|^2)^s \hat{g}(y) \|_{\mathrm{L}^2_y} = \mathrm{N}_r(f) \| g \|_s.$$

Nous laissons au lecteur la preuve des corollaires suivants :

Corollaire 1. — *Soit K un compact de R^n; $(f, g) \to f * g$ est une application bilinéaire continue de $\mathrm{A}^r_{\mathrm{loc}} \times \mathrm{H}^s_{\mathrm{K}}$ dans $\mathrm{H}^{r+s}_{\mathrm{loc}}$.*

Corollaire 2. — *L'application qui, à chaque $f \in \mathrm{A}^r_{\mathrm{loc}}$, fait correspondre l'opérateur de convolution $f *$ de H^s_c dans $\mathrm{H}^{r+s}_{\mathrm{loc}}$ est une application linéaire continue de $\mathrm{A}^r_{\mathrm{loc}}$ dans $\mathrm{L}_b(\mathrm{H}^s_c; \mathrm{H}^{r+s}_{\mathrm{loc}})$.*

7. Énoncé et fin de la preuve du théorème.

Considérons une variété $\mathrm{C}^\infty \mathrm{V}$ et une famille $\{\mathrm{P}(\nu, \mathrm{D}_x)\}$ $(\nu \in \mathrm{V})$ de polynômes différentiels sur R^n, d'ordre borné et C^∞ sur V.

Théorème 2. 2. — *On suppose que la variété* V *est connexe et que la famille* $\{P(v, D_x)\}$ *est de type analytique sur* V. *On fait en outre l'hypothèse suivante :*

(P) *Il existe une fonction indéfiniment différentiable de* v, *dans* V, $E(x, v)$, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$ *qui possède les propriétés suivantes :*

(I) *Il existe un réel* s *tel que l'opérateur de convolution (en* x*)* $E(x, v) *$ *soit une fonction indéfiniment différentiable de* v, *dans* V, *à valeurs dans* $L_b(H^0_c; H^s_{loc})$.

(II) *Pour toute fonction* $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x$ *ayant son support dans le complémentaire de l'origine,* $\alpha(x) E(x, v)$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* v, *dans* V, *à valeurs dans* $\mathcal{D}_x$.

(III) *Pour tout* $v \in$ V, $P(x, D_x) E(x, v) = \delta_x$.

Dans ces conditions, la famille $\{P(v, D_x)\}$ *est formellement hypoelliptique.*

Choisissons un entier $k \geqslant 0$ tel que $2k + s \geqslant 0$. Nous allons montrer que, sous les conditions de l'énoncé, la famille $\{(1 - \Delta_x)^k P(v, D_x)\}$ est formellement hypoelliptique. Des définitions 2. 1 et 2. 4 résulte immédiatement qu'il en sera de même de la famille $\{P(v, D)_x\}$.

Il est d'abord clair, en vertu de (II) (cf par exemple théorème 3. 4 et remarque 2, et théorème 3. 7, Hörmander [1]), que, pour chaque $v \in$ V, $P(v, D_x)$ et donc aussi $(1 - \Delta_x)^k P(v, D_x)$ sont hypoelliptiques.

Soit $\omega \in \mathcal{D}_x$, de support S, égale à 1 sur un voisinage de 0. Appelons $E_k(x)$ la transformée de Fourier réciproque de $(1 + 4\pi^2|y|^2)^{-k}$. Posons alors :

$$G(x, v) = [\omega(x)E_k(x)] * [\omega(x)E(x, v)].$$

Nous allons montrer que $G(x, v)$ vérifie chacune de nos trois hypothèses provisoires (n° 1 du présent paragraphe) relativement à la famille $\{(1 - \Delta)^k P(v, D)\}$.

C'est trivial pour 1° : il suffit de prendre K = S + S.

Vérifions 2°. Soit Ω un ouvert borné de R^n. En remarquant que H^0 n'est pas autre chose que $L^2(R^n)$, il résulte des propriétés de $E(x, v)$ que l'opérateur de convolution $[\omega(x)E(x, v)] *$ est une fonction C^∞ de v à valeurs dans $L_b(L^2(\Omega); H^s)$. Mais il est manifeste que $E_k(x) *$ applique continûment H^s dans H^{s+2k} et, *a fortiori*, puisque $2k + s \geqslant 0$, dans $H^0 = L^2(R^n)$. De là aussitôt 2°.

Vérifions enfin 3°. Posons $L(x, \nu) = (1-\Delta)^k P(\nu, D) G(x, \nu) - \delta_x$. Comme $(1-\Delta)^k E_k(x) = \delta_k$, il existe $\alpha \in \mathcal{D}_x$ ayant son support dans $\complement \{0\}$ telle que :

$$L(x, \nu) = (1-\Delta)^k P(\nu, D)\,[\alpha(x)\, G(x, \nu)].$$

Comme $E_k(x)$ est indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine, il résulte immédiatement de la propriété (II) de $E(x, \nu)$ que $L(x, \nu)$ est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $\mathcal{E}_x$ et, en réalité, à valeurs dans $(\mathcal{D}_K)_x$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Il est clair, d'après la preuve, que nous aurions pu remplacer la propriété (I) par la suivante :

(I′) *Il existe un réel* s *et un voisinage compact* L *de* 0 *dans* R^n *tels que* $E(x, \nu) *$ *soit une fonction* C^∞ *de* ν *à valeurs dans* $L_b(H^0_L; H^s_{loc})$.

En fait, on aurait pu «localiser» entièrement la propriété (P).

Proposition 2. 5. — *Supposons la variété* V *connexe et la famille* $\{P(\nu, D)_x\}$ *de type analytique sur* ν. *La propriété* (P) *du théorème* 2. 2 *est équivalente à chacune des propriétés suivantes :*

(FHE) *La famille* $\{P(\nu, D_x)\}$ *est formellement hypoelliptique.*

(P′) *Il existe deux nombres* > 0, s, d, *et une fonction* $E(x, \nu)$ C^∞ *de* ν *dans* V, *à valeurs dans* $(A^{s,d}_{loc})_x$, *tels que* $P(\nu, D_x)\, E(x, \nu) = \delta_x$ *pour tout* $\nu \in V$.

(P″) *Il existe* s *réel*, $d > 0$, *et une fonction* $E(x, \nu)$ C^∞ *de* ν *dans* V, *à valeurs dans* $(A^{s,d}_{loc})_x$, *tels que* $P(\nu, D_x)\, E(x, \nu) = \delta_x$ *pour tout* $\nu \in V$.

(P′) $\Longrightarrow$ (P″) trivialement. Puisque nous supposons V connexe et la famille $\{P(\nu, D)\}$ de type analytique sur V, (P) $\Longrightarrow$ (FHE) d'après le théorème 2. 2 Et (FHE) $\Longrightarrow$ (P′) d'après le théorème 2. 1.

Reste donc à prouver que (P″) $\Longrightarrow$ (P). Pour cela, remarquons que $A^{s,d}_{loc}$ est plongé continûment dans A^s_{loc}. Le corollaire 2 du lemme 2. 7 montre alors que $f(x) \to f(x) *$ applique continûment $A^{s,d}_{loc}$ dans $L_b(H^0_c; H^s_{loc})$. Par conséquent, $E(x, \nu) *$ est une fonction C^∞ de ν à valeurs dans $L_b(H^0_c; H^s_{loc})$, ce qui prouve la partie (I) de (P). La partie (II) résulte du corollaire 2 de la proposition 1. 9. Enfin, (III) est trivialement vérifiée.

§ 7. Autres familles de polynômes différentiels hypoelliptiques.

Soit $u \in L(R^n; R^n)$, représenté par la matrice (u_j^i) dans le système de coordonnées (x_i). Nous noterons $P(uD_x)$ le polynôme différentiel associé au polynôme $P(u_1^1 y_1 + \cdots + u_1^n y_n, \ldots, u_n^1 y_1 + \cdots + u_n^n y_n)$. Reprenons maintenant la variété V et considérons une famille $\{P(v, D_x)\}$ de polynômes différentiels sur R^n, C^∞ et d'ordre borné sur V.

Définition 2. 9. — *Nous dirons que la famille* $\{P(v, D)\}$ *est quasi formellement hypoelliptique s'il existe une fonction* C^∞ *de* v, *à valeurs dans* $L(R^n; R^n)$, $u(v)$, *qui soit, pour chaque* $v \in V$, *un automorphisme de* R^n, *et telle que la famille* $\{P(v, u(v)D)\}$ *soit formellement hypoelliptique.*

On peut démontrer, au sujet de ces familles, le résultat suivant :

Théorème 2. 3. — *Soient une variété* $C^\infty V$, $\{P(v, D)\}$ *une famille quasi formellement hypoelliptique, d'ordre* $m \geqslant 1$, *sur* V. *Il existe deux nombres* > 0 s, d, *et un nombre* k, $0 \leqslant k < 1$, *enfin un élément* $E(x, v)$ *de* $\mathcal{E}_v(k; A_{\text{loc}}^{s,d})$ (7) *tel qu'on ait, pour tout* $v \in V$, $P(v, D_x)E(x, v) = \delta_x$.

La preuve suit pas-à-pas celle du théorème 2. 1, avec les adaptations qui s'imposent. Bornons-nous à signaler que l'une des articulations essentielles du raisonnement est constituée par le fait suivant :

Il existe $s > 0$, $0 \leqslant k < 1$, tels que, pour tout opérateur différentiel D_v sur V (dont l'ordre est noté μ) et tout compact K de V, il existe une constante finie $A(D_v, K)$ telle que, pour tous $v \in K$ et $y \in R^n$, on ait (en posant $\omega = \inf(m, \mu)$) :

$$|D_v P(v, y)| \leqslant A(D_v, K)(1 + |y|)^{k\omega}(1 + |P(v, y)|)$$

et, pour tout $p \in N^n$, $p \neq 0$:

$$(1 + |y|)^s |D_v P^{(p)}(v, y)| \leqslant A(D_v, K)(1 + |y|)^{k\omega}(1 + |P(v, y)|).$$

(7) Le rôle des espaces E_r (voir chap. I, § 3) est tenu ici par les espaces $A_{\text{loc}}^{r,d}$, $d > 0$ étant fixe et r parcourant R.

La propriété du théorème 2. 3 n'est pas un apanage des familles quasi formellement hypoelliptiques :

Considérons, pour t réel, $|t| \leqslant 1$,

$$P(t, y) = 1 + y_1^2 + y_2^4 + ity_1y_2^3 :$$

1° *la famille* $\{P(t, D_x)\}$ *n'est pas quasi formellement hypoelliptique*; 2° *il existe* $s > 0$, $d > 0$ *et* $k < 1$ $(k \geqslant 0)$, *tels qu'on ait, pour un élément* $E(x, t)$ *de* $\mathcal{E}_t(k; A_{loc}^{s,d})$, *pour tout* $t \in (-1, 1)$, $P(t, D_x)\, E(x, t) = \delta_x$.

Preuve de 1°.

Posons $P_0(y) = 1 + y_1^2 + y_2^4$, $P_1(y) = y_1y_2^3$. On a :

$$P(t, y) = P_0(y) + itP_1(y).$$

Soient alors deux automorphismes u_0 et u de R^2. Nous aurons prouvé 1° si nous prouvons que $P_0(u_0y)$ et $P(t, uy)$, pour $t \neq 0$, ne peuvent être équivalents. Remarquons que s'ils l'étaient, alors $P_0(y)$ et $P(t, uu_0^{-1}\, y)$ seraient équivalents, et réciproquement. Ceci signifie que nous pouvons supposer u_0 = automorphisme identique de R^2. Prouvons d'abord que si l'un des deux polynômes $P_0(y)$, $P_0(uy)$, est plus faible que l'autre, ils sont alors nécessairement équivalents. Si, par exemple, $P_0(uy)$ est plus fort que $P_0(y)$, on doit avoir $u_2^1 = 0$ (rappelons que $uy = (u_1^1y_1 + u_1^2y, u_1^2y_2 + u_2^2y_2)$, sinon, pour $y_2 = r \geqslant 0$ et $y_1 = (u_2^1)^{-1}u_2^2y_2$, $|P_0(uy)|$ serait de l'ordre de r^2 alors que $|P_0(y)|$ serait de l'ordre de r^4. Mais puisque $u_2^1 = 0$, $P_0(uy)$ est de la forme $1 + (ay_1 + by_2)^2 + y_2^4$, avec $a \neq 0$ (car u est un automorphisme), manifestement équivalent à $1 + y_1^2 + y_2^4$.

Prouvons maintenant 1°. Première possibilité : $P_0(uy)$ est équivalent à $P_0(y)$. Prenons alors $y_1 = r^2$ $(t \in R)$, $y_2 = r$. On a : $P_0(y) = 1 + 2r^4$; $P_1(y) = r^5$; lorsque $r \to \infty$, $|P_1(y)|/|P_0(y)|$ tend vers $+ \infty$. Ceci entraîne bien que $P(t, uy)$ n'est pas, pour $t \neq 0$, plus faible que $P_0(y)$. Deuxième possibilité : $P_0(uy)$ n'est pas équivalent à $P_0(y)$. Mais alors $P_0(uy)$ n'est pas plus faible que $P_0(y)$; il y a donc une suite $\{y_k\}$ dans R^2 telle que, si $k \to \infty$, $|P_0(uy_k)|/|P_0(y_k)|$ tend vers l'infini. Comme $|P(t, uy)| \geqslant |P_0(uy)|$, ceci prouve bien que $P(t, uy)$ n'est pas plus faible que $P_0(y)$.

Preuve de 2°.

Pour tout $p \in N^2$, $p \neq 0$, et tout $y \in R^2$, on a :

$$|P_0^{(p)}(y)| \leqslant A_0(1 + |y|)^{-1}|P_0(y)| \quad (A_0 < + \infty).$$

Il existe d'autre part une constante finie A_1 telle qu'on ait, pour tout $y \in R^2$ et tout $t \in (-1, 1)$:

$$|tP_1^{(p)}(y)| \leqslant A_1(1 + |y|)^{-1} |P(t, y) \qquad \text{si} \qquad p_1 \geqslant 1;$$

et si $p_1 = 0$, $p_2 \geqslant 1$:

$$|tP_1^{(p)}(y)| \leqslant A_1(1 + |y_2|)^{-1} |P(t, y)|,$$
$$|tP_1^{(p)}(y)| \leqslant A_1(1 + |y_1|)^{-1/3} |P(t, y)|.$$

Ceci prouve qu'il existe une constante finie A telle que, pour tous $y \in R^2$, $t \in (-1, 1)$ et $p \in N^2$, $p \neq 0$:

$$(2.12) \qquad |P^{(p)}(t, y)| \leqslant A(1 + |y|)^{-1/3} |P(t, y)|.$$

Ces inégalités prouvent d'abord que $P(t, D_x)$ est hypoelliptique, pour tout $t \in (-1, 1)$.

Remarquons, d'autre part, que, pour tous $y \in R^2$, $t \in (-1,1)$:

$$(2.13) \quad |P_1(y)| \leqslant \sqrt{|y_1|}\, |P_0(y)| \leqslant (1 + |y|)^{1/2} |P(t, y)|.$$

Si enfin $p \in N^2$, $p \neq 0$, on a, pour ces y et ces t :

$$|P_1^{(p)}(y)| \leqslant 3\,!\, |P_0(y)| \leqslant 3\,!\, |P(t, y)|,$$

et donc, *a fortiori :*

$$(2.14) \quad |P_1^{(p)}(y)| \leqslant 3\,!(1 + |y|)^{-1/3} (1 + |y|)^{1/2} |P(t, y)|.$$

Nommons $E(x, t)$ la transformée de Fourier réciproque de $\dfrac{1}{P(t, y)}$. La dérivée première de $P(t, y)$ par rapport à t est $iP_1(y)$; les dérivées ultérieures sont toutes nulles. Il s'ensuit que la transformée de Fourier de $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^r E(x, t)$ est $F_r(t, y) = (-i)^r r\,! [P_1(y)]^r/[P(t, y)]^{r+1}$. La transformée de Fourier de $(-2i\pi x)^p \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^r E(x, t)$ est $D_y^p F_r(t, y)$ $(p \in N^2)$, c'est-à-dire une combinaison linéaire (finie !) de fractions de la forme :

$$[P_1^{(q_1)}(y) \ldots P_1^{(q_r)}(y) P^{(q_1')}(t, y) \ldots P^{(q_k')}(t, y)]/[P(t, y)]^{r+r'+1},$$

r' pouvant prendre toutes valeurs entières entre 0 et $|p|$. On peut démontrer (cf preuve du théorème 2. 1, partie 2°)

que cette fraction est majorée, pour tout $y \in R^2$ et tout $t \in (-1, 1)$, par :

$$A'(1 + |y|)^{r/2} (1 + |y|)^{-\frac{1}{3}\frac{|p|}{4}} / |P(t, y)| \; (A' < +\infty).$$

Pour cela, on détermine le nombre maximum d'indices q_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ pouvant être nuls, compte tenu de la valeur de r' et de ce que $|q_j| \leqslant 4$, $|q'_{j'}| \leqslant 4$ $(1 \leqslant j' \leqslant r'$; se rappeler que $\deg P(t, y) = \deg P_1(y) = 4)$. On applique ensuite les inégalités (2. 12), (2. 13), (2. 14).

Comme $(1 + |y|^2) \leqslant |P(t, y)|$, on en conclut que

$$(-2i\pi x)^p \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r E(x, t)$$

appartient à $\left(A^{2-\frac{r}{2}+\frac{|p|}{12}}\right)_x$ pour tout $t \in (-1, 1)$ et, comme on le vérifie sans peine, est une fonction continue de t à valeurs dans cet espace. Puisque r et p sont arbitraires, cela signifie que $E(x, t) \in \mathcal{E}_t(1/2; A^{2, 1/12})$. C.Q.F.D.

Cet exemple et les résultats le concernant, que nous venons d'établir, nous seront utiles plus loin. Nous aurons aussi besoin de l'inégalité suivante :

Pour tout $y \in R^2$ et tout $t \in (-1, 1)$, on a :

$$(2.\ 15) \quad |P_1^{(1,0)}(y)| \leqslant 3(1 + |y_1|^{1/2} + |y_2|)^{-1} |P(t, y)|.$$

En effet :

$$|P_1^{(1,0)}(y)| = |y_2^3| = (1 + |y_1|^{1/2} + |y_2|)^{-1} (|y_2^3| + |y_1|^{1/2}|y_2^3| + |y_2^4|).$$

Mais

$$|y_2^3| + |y_2^4| \leqslant 2(1 + |y_2^4|) \leqslant 2|P_0(y)| \quad \text{et} \quad |y_1|^{1/2}|y_2^3| \leqslant y_1^2 + y_2^4 \leqslant |P_0(y)|,$$

d'où l'inégalité (2. 15).

CHAPITRE III

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS VARIABLES UN CRITÈRE D'HYPOELLIPTICITÉ

Dans ce chapitre, nous ferons intervenir deux espaces R^n, notés respectivement R^n_x et R^n_ξ (ce qui indique la notation des variables et des coordonnées cartésiennes dans chacun d'eux). Le second, R^n_ξ, ou l'un des sous-ensembles ouverts de R^n_ξ, jouera le rôle de la variété V des chapitres précédents. Ceci veut dire que nous manipulerons des familles $\{P(\xi, D_x)\}$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur R^n_x dépendant de ξ; la dépendance par rapport à ξ sera toujours telle que la famille soit d'ordre borné et C^∞ sur R^n_ξ (définition 2. 2 et 2. 5), même lorsque nous ne mentionnerons pas ces hypothèses.

Soit Ω un ouvert de R^n; la donnée d'une telle famille

$$\{P(\xi, D_x)\}\,(\xi \in \Omega)$$

définit un opérateur différentiel sur Ω, c'est-à-dire une application linéaire continue de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans lui-même qui diminue le support, de la façon suivante : on pose, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\psi(x, \xi) = P(\xi, D_x)\varphi(x)$, puis $P\varphi(x) = \psi(x, x)$. On vérifie aussitôt que P est un opérateur différentiel sur Ω. Mais plutôt qu'à P lui-même, nous nous intéresserons à l'expression de P dans le système de coordonnées cartésiennes initialement donné dans R^n_x, expression qu'il est raisonnable de noter $P(x, D_x)$ ou, si aucune confusion n'est à craindre, $P(x, D)$ (Hörmander [1]). C'est que les propriétés dont nous allons nous servir ne sont pas invariantes par changement de coordonnées dans R^n_x (ou dans Ω) et sont plutôt associées à la famille $\{P(\xi, D_x)\}$ qu'à l'opérateur intrinsèque P.

Nous définirons le transposé ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ (non de P) par la formule :

$$\int [{}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})\varphi(x)]\, \psi(x)dx = \int \varphi(x)[\mathrm{P}(x, \mathrm{D})\psi(x)]dx, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

L'expression de ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ à partir de celle de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est suffisamment classique pour que nous ne la rappelions pas ici. Bien entendu, ${}^t\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ définit un opérateur différentiel sur Ω ayant d'étroits rapports avec le transposé intrinsèque de P; mais rappelons que celui-ci agit sur les courants de degré n.

Nous utiliserons aussi la notation :

$$\mathrm{RP}(x, \xi, \mathrm{D}_x) = \mathrm{P}(\xi, \mathrm{D}_x) - \mathrm{P}(x + \xi, \mathrm{D}_x),$$

qui aura un sens chaque fois que ξ et $x + \xi$ appartiendront à Ω, par exemple pour $\xi \in \mathrm{U}$ ouvert, $\overline{\mathrm{U}}$ compact, $\overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$, et $x \in \Omega - \mathrm{U}$. Alors $\mathrm{RP}(x, \xi, \mathrm{D}_x)$ sera un opérateur différentiel sur $\Omega - \mathrm{U}$, à coefficients C^∞ en (x, ξ) dans $(\Omega - \mathrm{U}) \times \mathrm{U}$, ces coefficients étant tous nuls pour $x = 0$ quel que soit $\xi \in \mathrm{U}$.

Soit une variété C^∞ W (point courant : w; $\mathcal{D}'_w$: espace des distributions sur W).

Définition 3. 1. — *Une application f d'un sous-ensemble de $\mathcal{D}'_w$ dans lui-même sera dite progressive en un élément* T *de ce sous-ensemble si, pour tout entier $q \geqslant 0$, il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $f^p(\mathrm{T})$ soit une fonction de classe C^q sur* W.

Par f^p, nous entendons la composée $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{p}$.

Définition 3. 2. — *Soient Ω un ouvert de R^n et $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ un opérateur différentiel sur Ω. Nous dirons que $\mathrm{P}(x, \mathrm{D})$ est de type progressif sur Ω s'il existe une distribution $\mathrm{E}(x, \xi)$ sur $\mathrm{R}^n_x \times \Omega_\xi$, telle que $\mathrm{P}(\xi, \mathrm{D}_x)\, \mathrm{E}(x, \xi) = \delta_x 1(\xi)$ et qui possède les propriétés suivantes :*

(P_1) *Il existe un nombre réel s, un nombre $d > 0$ et un nombre k, $0 \leqslant k < 1$, tels que $\mathrm{E}(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))\, (k; \mathrm{A}^{s, d}_{\mathrm{loc}})$.*

(P_2) *Pour tout ouvert borné $\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$, il existe une fonction $\omega(x) \in \mathcal{D}_x$ de support dans $\Omega - \mathrm{U}$, égale à 1 au voisinage de 0, telle que l'application linéaire*

$$\mathrm{T}(x, \xi) \to \omega(x)\mathrm{RP}(x, \xi, \mathrm{D}_x)[\mathrm{E}(x, \xi) * \mathrm{T}(x, \xi)]$$

de $(\mathcal{E}_\xi(\mathrm{U}))\, (\mathcal{E}'_x)$ dans lui-même soit progressive en $\delta_x 1(\xi)$.

Remarques sur les notations : $1(\xi)$ désigne la fonction définie dans l'ouvert que l'on considère, par exemple Ω ou U, et égale à 1 partout sur cet ouvert; si U est un ouvert de R^n, $(\mathcal{E}_\xi(U))(k; A^{s,d}_{loc})$ désigne l'espace $\mathcal{E}_v(k; E_s)$ relatif à la variété $V = U$ (et donc $v = \xi$) et aux espaces $E_r = A^{r,d}_{loc}(r \in R; d$ reste fixe); par $*$, nous désignerons toujours les convolutions en x; enfin, $(\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ de ξ dans U, à valeurs dans l'espace $\mathcal{E}'_x$ des distributions en x (sur R^n) à support compact.

Nous allons maintenant établir, dans les deux propositions qui suivent, l'indépendance, en quelque sorte, de la définition 3. 2 par rapport au choix de la solution élémentaire $E(x, \xi)$ et des fonctions $\omega(x)$ qui figurent dans (P_2).

PROPOSITION 3. 1. — *Supposons* $P(x, D)$ *de type progressif sur* Ω *et soit* $F(x, \xi)$ *une fonction* C^∞ *de* ξ *dans* Ω, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$, *telle que* $P(\xi, D_x) F(x, \xi) = \delta_x$ *pour tout* $\xi \in \Omega$. *Alors* $F(x, \xi)$ *vérifie les conditions* (P_1) *et* (P_2) *de la définition* 3. 2.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME 3. 1. — *Soient une variété* C^∞ V (*point courant :* v) *et une famille* $\{P(v, D_x)\}$ *de polynômes différentiels sur* R^n_x, *d'ordre borné et* C^∞ *sur* V (voir définition 2. 2 et définition 2. 5). *Supposons qu'il existe une fonction* $E(x, v)$ C^∞ *dans* V, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$, *telle que, pour tout* $v \in V$, $P(v, D_x) E(x, v) = \delta_x$ *et que, pour toute fonction* $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x$ *ayant son support dans* $\complement \{0\}$, $\alpha(x) E(x, v) \in \mathcal{E}_x(\mathcal{E}_v)$.

Dans ces conditions, quel que soit l'ouvert U *de* R^n, *si*

$$T(x, v) \in [\mathcal{D}'_x(U)] (\mathcal{E}_v)$$

et si $P(v, D_x) T(x, v) \in (\mathcal{E}_x(U)) (\mathcal{E}_v)$, *en particulier si*

$$P(v, D_x) T(x, v) = 0,$$

alors $T(x, v) \in (\mathcal{E}_x(U)) (\mathcal{E}_v)$.

Nous ne ferons pas la preuve de ce lemme, entièrement calquée sur celle du cas classique, c'est-à-dire du cas d'un seul polynôme différentiel $P(D_x)$ possédant une solution élémentaire $E(x)$ indéfiniment différentiable dans $\complement \{0\}$, solution que l'on utilise pour établir l'hypoellipticité de $P(D_x)$ (voir par exemple Schwartz [5], 4-05, proposition 3).

Noter que les conditions du lemme 3. 1 exigent que $P(\varphi, D_x)$ soit hypoelliptique pour chaque $\varphi \in V$.

Démontrons la proposition 3. 1. Soit $E(x, \xi)$ une distribution sur $R^n_x \times \Omega_\xi$ remplissant toutes les conditions de la définition 3. 2 relativement à $P(x, D)$. C'est une conséquence immédiate de (P_1) que $E(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans Ω à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$; et il résulte de la proposition 1. 17, que, pour toute $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x\left(\complement \{0\}\right)$, on a $\alpha(x)E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(\mathcal{E}_x)$.

Ceci dit, posons $\Phi(x, \xi) = F(x, \xi) - E(x, \xi)$. En vertu de ce qui vient d'être dit, et des hypothèses sur $F(x, \xi)$, on a $\Phi(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(\mathcal{D}'_x) = \mathcal{D}'_x(\mathcal{E}_\xi(\Omega))$; et il est évident que $P(\xi, D_x)\Phi(x, \xi) = 0$ pour tout $\xi \in \Omega$. Du lemme 3.1 résulte alors immédiatement que $\Phi(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(\mathcal{E}_x)$.

$F(x, \xi)$ *vérifie* (P_1); car $(\mathcal{E}_x(\Omega))(\mathcal{E}_x) \subset (\mathcal{E}_\xi(\Omega))(k; A^{s,d}_{loc})$ quels que soient s, d, k, et donc $F(x, \xi) = E(x, \xi) + \Phi(x, \xi)$ appartient à $(\mathcal{E}_\xi(\Omega))$ $(k;\ A^{s,d}_{loc})$ si $E(x, \xi)$ appartient à cet espace.

$F(x, \xi)$ *vérifie* (P_2). En effet, soient un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ et $\omega(x)$ pouvant figurer dans (P_2) associée à U. Posons, pour $S(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}'_x)$ et $T \in (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{E}'_x)$:

$$f_S(T) = \omega(x)RP(x, \xi, D_x)\,[S(x, \xi) * T(x, \xi)].$$

On a évidemment $f_F - f_\Phi = f_E$ et $f_\Phi(T) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$ pour tout $T \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}'_x)$. Cela permet de prouver sans peine que, pour ces mêmes T, et tout entier $p \geqslant 0$:

$$(f_F)^p(T) \equiv (f_E)^p(T) \quad \text{modulo} \quad (\mathcal{E}_\xi(U))(\mathcal{D}_x).$$

Ceci implique visiblement la proposition 3. 1, après le choix $T(x, \xi) = \delta_x 1(\xi)$.

Proposition 3. 2. — *Supposons* $P(x, D)$ *de type progressif sur* Ω *et soit* $E(x, \xi)$ *une fonction* C^∞ *de* ξ *dans* Ω, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_x$, *qui possède toutes les propriétés de la définition* 3. 2 (relativement à $P(x, D)$).

Soit un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$. *Pour toute fonction* $\overline{\omega}(x) \in \mathcal{D}_x$ *de support dans* $\Omega - U$, *égale à* 1 *au voisinage de* 0, *l'application* $T(x, \xi) \rightarrow \overline{\omega}(x)\ RP(x, \xi, D_x)\,[E(x, \xi) * T(x, \xi)]$ *de* $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}'_x)$ *dans lui-même est progressive en* $\delta_x 1(\xi)$.

Posons, pour $\alpha(x) \in \mathcal{D}_x(\Omega - U)$ et $T(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}'_x)$:

$$g_\alpha(T) = \alpha(x)RP(x, \xi, D_x)\,[E(x, \xi) * T(x, \xi)].$$

Soient alors $\omega(x) \in \mathcal{D}_x$ pouvant figurer dans (P_2) (relativement à U) et $\varpi(x) \in \mathcal{D}_x$ quelconque, à support dans $\Omega - U$ et égale à 1 au voisinage de 0. Pour prouver la proposition 3. 2, il suffit de montrer que, pour tout entier $p \geqslant 0$:

$$(g_{\varpi})^p(\delta_x 1(\xi)) \equiv (g_\omega)^p(\delta_x 1(\xi)) \quad \text{modulo} \, (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x).$$

Pour cela, nous raisonnerons par récurrence sur p. Posons $\alpha = \varpi - \omega$; on a $g_\alpha = g_{\varpi} - g_\omega$, et $\alpha(x)$ a son support dans $\complement\{0\}$. D'après le corollaire 1 de la proposition 1. 17, $E(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans $\left(\complement\{0\}\right)_x \times \Omega_\xi$. De cela résulte que notre assertion est vraie pour $p = 1$, puisque :

$$g_\alpha(\delta_x 1(\xi)) = \alpha(x) RP(x, \xi, D_x) E(x, \xi).$$

Supposons notre assertion établie jusqu'à $p - 1$ $(p \geqslant 2)$; on a donc :

$$(g_{\varpi})^p(\delta_x 1(\xi)) = g_{\varpi}[(g_\omega)^{p-1}(\delta_x 1(\xi))] + g_{\varpi}[\varphi_p(x, \xi)],$$

où $\varphi_p(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$. Mais $E(x, \xi) * \varphi_p(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}_x)$ et donc $g_{\varpi}[\varphi_p(x, \xi)] \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$.

Reste à prouver que

$$g_\alpha[(g_\omega)^{p-1}(\delta_x 1(\xi))] = g_{\varpi}[(g_\omega)^{p-1}(\delta_x 1(\xi))] - (g_\omega)^p(\delta_x 1(\xi))$$

appartient aussi à $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}_x)$. Pour cela, on utilise le fait que, pour tout entier $q \geqslant 0$ (et donc pour $q = p - 1$), $(g_\omega)^q(\delta_x 1(\xi))$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans $\left(\complement\{0\}\right)_x \times \Omega_\xi$, ce qui résulte du corollaire 1 de la proposition 17. Comme $\alpha(x)$ a son support dans $\complement\{0\}$, on en déduit bien ce qu'on désirait.

Définition 3. 3. — *Soient Ω un ouvert de R^n et $P(x, D)$ un opérateur différentiel sur Ω. Nous dirons que $P(x, D)$ est formellement hypoelliptique sur Ω si la famille $\{P(\xi, D_x)\}$ $(\xi \in \Omega)$ est formellement hypoelliptique.*

Proposition 3. 3. — *Si $P(x, D)$ est formellement hypoelliptique sur Ω, il en est de même de ${}^tP(x, D)$.*

Immédiat en utilisant l'expression de ${}^tP(x, D)$ et la proposition 2. 1.

Théorème 3. 1. — *Si $P(x, D)$ est formellement hypoelliptique sur Ω, $P(x, D)$ est de type progressif sur Ω.*

Puisque la famille $\{P(\xi, D_x)\}$ $(\xi \in \Omega)$ est formellement hypoelliptique, il existe, en vertu du théorème 2. 1, $s > 0$, $d > 0$ et $E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))\,((A^{s,d}_{\text{loc}})_x)$ tels que, pour tout $\xi \in \Omega$, $P(\xi, D_x)\,E(x, \xi) = \delta_x$. Il s'ensuit trivialement que $E(x, \xi)$ vérifie la condition (P_1) de la définition 3. 2; tout revient à montrer que $E(x, \xi)$ vérifie aussi (P_2).

Considérons une décomposition interne de la famille $\{P(\xi, D)\}$ (définition 2. 3) :

$$P(\xi, D) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\xi) P_j(D),$$

c'est-à-dire que les $a_j(\xi) \in \mathcal{E}_\xi(\Omega)$ et que les $P_j(D)$ sont des éléments de la famille $\{P(\xi, D)\}\,(\xi \in \Omega)$.

Soient un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ et $\omega(x) \in \mathcal{D}_x$ une fonction de support $K \subset \Omega - U$ et égale à 1 au voisinage de 0. Pour $T(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{D}'_x)$, posons :

$$f(T) = \omega(x)\, RP(x, \xi, D_x)\,[E(x, \xi) * T(x, \xi)].$$

Nous allons prouver ceci : quel que soit $r \in R$, pour tout entier $p \geqslant 0$, f^p définit un élément de $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(L_b(A^{r,d}_K;\, A^{r+pd,d}_K))$. Ceci entraînera que, pour tout $p \geqslant 0$, $f^p(\delta_x 1(\xi)) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,((A^{pd}_K))$, d'où la progressivité de f en $\delta_x 1(\xi)$ par application de la proposition 1. 16.

Pour $x \in K$ et $\xi \in U$, posons

$$b_j(x, \xi) = a_j(\xi) - a_j(x + \xi) \quad (1 \leqslant j \leqslant r).$$

On a :

$$f(T) = \sum_{j=1}^{r} \omega(x) b_j(x, \xi)\,\{[P_j(D)E(x, \xi)] * T(x, \xi)\}.$$

Appliquons d'abord la dernière partie du scholie du théorème 2. 1 : pour tout $j = 1, \ldots, r$, $P_j(D)E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(\Omega))\,(A^{0,d}_{\text{loc}})$ et donc l'opérateur $P_j(D)E(x, \xi) *$ appartient à

$$(\mathcal{E}_\xi(\Omega))\,(L_b(A^{r,d}_K;\, A^{r,d}_{\text{loc}})),$$

en vertu du corollaire 2 de la proposition 1. 10.

D'autre part, $b_j(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,((\mathcal{E}_0)_x)$ (pour $\mathcal{E}_0$, voir définition 1. 10) et donc définissent, d'après le corollaire 1 de la proposition 1. 13, en tant qu'opérateurs de multiplication, des éléments de $(\mathcal{E}_\xi(U))\,(L(A^{r,d}_{\text{loc}};\, A^{r+d,d}_{\text{loc}}))$. Enfin, il est clair que la multiplication par $\omega(x)$ appartient à

$$(\mathcal{E}_\xi(U))\,(L_b(A^{r+d,d}_{\text{loc}};\, A^{r+d,d}_k)$$

de sorte qu'au total, $f \in (\mathcal{E}_\xi(U))(L_b(A_k^{r,d};\ A_k^{r+d,d}))$. Comme r est un réel arbitraire, en itérant ce résultat, on démontre notre assertion.

PROPOSITION 3. 4. — *Soit* $P(x, D)$

$$1 - \frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + ix_1\left(\frac{1}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3}.$$

(I) $P(x, D)$ *n'est formellement hypoelliptique sur aucun voisinage ouvert de l'origine dans* R^2 *et il n'existe pas de voisinage ouvert* U *de* 0 *qui possède la propriété suivante: il existe un homéomorphisme* C^∞ *de* U *sur un ouvert* Ω *de* R^2 *tel que le transformé de* $P(x, D)$ *par cet homéomorphisme soit formellement hypoelliptique sur* Ω.

(II) $P(x, D)$ *est de type progressif sur* R^2.

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans R^2 et soit $x \to x' = x'(x)$ un homéomorphisme C^∞ de U sur un ouvert Ω de R^2; nous noterons $x' \to x = x(x')$ l'homéomorphisme réciproque. Le transformé $Q(x', D')$ de $P(x, D)$ par cet homéomorphisme se définit ainsi :

$$Q(x', D')\varphi(x') = \{P(x, D)\,[\varphi(x'(x))]\}_{x=x(x')}, \quad \varphi(x') \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Preuve de (I).

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que $x'(0) = 0$, de sorte que Ω est lui-même un voisinage de 0. Comme, dans le complémentaire de l'origine, $P(x, D)$ est formellement hypoelliptique, nous pouvons supposer U contenu dans la bande verticale $|x_1| < 1$. Nous noterons $u(x_0)$ la jacobienne de l'homéomorphisme $x \to x'$ au point $x = x_0$; $u(\xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans U, à valeurs dans $L(R^2; R^2)$; c'est un automorphisme pour tout $\xi \in U$.

A la famille $\{P(\xi, D_x)\}$ $(\xi \in U)$ se trouve associée la famille de polynômes $P(\xi, y) = 1 + y_1^2 + y_2^4 + i\xi_1 y_1 y_2^3$ que nous avons étudiée, pour $|\xi_1| < 1$, à la fin du chapitre II. Posons, comme là, $P_0(y) = 1 + y_1^2 + y_2^4$, $P_1(y) = y_1 y_2^3$.

Il est aisé de vérifier que l'on a, pour tout $\xi' \in \Omega$:

$$Q(\xi', y) = P(\xi(\xi'), u(\xi')y) + R(\xi', y),$$

avec :

$$R(\xi', u^{-1}(\xi')y) = ay_2^3 + by_2^2 y_1 + a'y_2^2 + b'y_2 y_1 + a''y_2 + b''y_1,$$

a, b, a', b', a'', b'' étant des nombres complexes (qui dépendent de ξ').

De ce fait, on peut déduire deux conclusions :

1) Il existe, pour chaque $\xi' \in \Omega$, une constante $C(\xi') > 0$ telle qu'on ait, pour tout $y \in R^2$:

$$C(\xi')\,|R(\xi', u^{-1}(\xi')y)| \leqslant |P_0(y)|,$$

et donc :

$$C(\xi')\,|R(\xi', y)| \leqslant |P_0(u(\xi')y)|.$$

En particulier, prenons $\xi' = 0$, ce qui entraîne $\xi_1(\xi') = 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $y \in R^2$: $C\,|Q(0, y)| \leqslant |P_0(u(0)y)|$.

2) Pour tout $\xi' \in \Omega$, et tout nombre $c > 0$, il existe une constante $A(\xi') > 0$ telle que, pour tout $y \in R^2$, on ait :

$$A(\xi')\,|R(\xi', u^{-1}(\xi')y)| \leqslant (1 + |y|)^{-1/3}(|P_0(y)| + c|P_1(y)|).$$

Ceci résulte facilement de l'expression de $R(\xi', u^{-1}(\xi')y)$ et de l'inégalité (2. 12). Or tout voisinage de l'origine contient un point ξ' tel que $\xi_1(\xi')$ soit $\neq 0$. Il résulte aussitôt de l'inégalité précédente que, pour un tel point $\xi' \in \Omega$, il existe $A_1 > 0$ telle que, pour tout $y \in R^2$:

$$A_1\,|R(\xi', y)| \leqslant (1 + |y|)^{-1/3}\,|P(\xi(\xi'), u(\xi')y)|.$$

Mais de cela on déduit que $Q(\xi', y)$ est équivalent à

$$P(\xi(\xi'),\ u(\xi')y).$$

Or nous avons vu, à la fin du chapitre II, que si u et v sont deux automorphismes de R^2, et si $t \neq 0$, on pouvait trouver une suite de point y_ν dans R^2 telle que

$$\lim_{\nu \to \infty} P(0, uy_\nu)\,[|P(t, vy_\nu)|^{-1}] = 0.$$

En prenant $t = \xi_1(\xi')$, $u = u(0)$ et $v = v(\xi')$, et en utilisant les conclusions de 1) et de 2), on voit que $Q(\xi', y)$ ne saurait être plus faible que $Q(0, y)$.

Preuve de (II).

Appelons $E(x, \xi)$ la transformée de Fourier réciproque de $\dfrac{1}{P(\xi, y)}$. Nous avons déjà prouvé que $E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(1/2\,;A^{2,1/12})$. Il s'ensuit que $E(x, \xi)$ vérifie la condition (P_1) de la définition 3. 2; reste à prouver que $E(x, \xi)$ vérifie (P_2).

On a : $RP(x, \xi, D_x) = ix_1P_1(D)$. Remarquons que nous n'avons pas à nous préoccuper de définir les ouverts où varient x et ξ, car $RP(x, \xi, D_x)$ a un sens pour tous x et ξ dans R^2. Supposons que le voisinage ouvert U de 0 soit relativement compact, et soit $\omega(x) \in \mathfrak{D}$, égale à 1 au voisinage de 0; nous noterons K le support de $\omega(x)$. Posons, pour $T(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(\mathcal{E}'_x)$:

$$f(T) = i\omega(x)x_1\{[P_1(D)\,E(x, \xi)] * T(x, \xi)\}.$$

Il nous faut prouver que f est progressive en $\delta_x 1(\xi)$. Posons $S_p = f^p(\delta_x 1(\xi))$ (p entier $\geqslant 0$). Pour tout entier q, on a, si $p \geqslant 1$:

$$x_1^q S_p = i\omega(x)\sum_{r=0}^{q+1}\binom{q+1}{r}[x_1^r P_1(D)E(x, \xi)] * (x_1^{q+1-r}S_{p-1})$$

Étude de $x_1^m P_1(D)\,E(x, \xi)$.

Remarquons que $(2i\pi x_1)^m P_1(D)E(x, \xi)$ est la transformée de Fourier réciproque de $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^m\left[\frac{P_1(y)}{P(\xi, y)}\right]$, qui est une somme finie de termes de la forme :

$$(3.\ 1)\qquad [P_1^{(m_0, 0)}(y)P^{(m_1, 0)}(\xi, y), \ldots, P^{(m_j, 0)}(\xi, y)]/[P(\xi, y)]^{j+1}$$

où nous pouvons toujours supposer $m_0 = 0$ ou 1 et, si $j \geqslant 1$, $m_i = 1$ ou 2, $(i = 1, \ldots, j)$, car le degré par rapport à y_1 de $P_1(y)$ est 1 et celui de $P(\xi, y)$ est 2. On a : $m_0 + m_1 + \cdots + m_j = m$.

Il est facile de voir (cf. fin du chapitre II) qu'il existe $B < +\infty$ telle que, pour tout $\xi_1 \in (-1, 1)$ et tout $y \in R^n$:

$$|P^{(h, 0)}(\xi, y)| \leqslant B(1 + |y|)^{-h}|P(\xi, y)|.$$

Il en résulte que le terme (3. 1) est majoré, en valeur absolue, pour ces ξ et ces y, par :

$$(3.\ 2)\qquad B^j(1 + |y|)^{-m+m_0}|P_1^{(m_0, 0)}(y)|/|P(\xi, y)|$$

Si $m_0 = 0$, la quantité (3. 2) est majorée par :

$$(3.\ 3)\qquad B^j(1 + |y|)^{-m+1/2}.$$

Cela résulte immédiatement de l'inégalité (2. 13). Si $m_0 = 1$, on applique l'inégalité (2. 15) et l'on trouve que (3. 2) est, dans ce cas aussi, majoré par (3. 3).

Ceci prouve que, pour chaque $\xi \in U$, $x_1^m P_1(D) E(x, \xi) \in A^{m-1/2}$. Par un raisonnement tout à fait analogue au précédent et à celui qui nous a servi, à la fin du chapitre II, à prouver que $E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))(1/2;\ A^{2, 1/12})$, on peut prouver que $x_1^m P_1(D) E(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))(1/2;\ A^{m-1/2,\ 1/12})$.

Preuve de progressivité de f en $\delta_x 1(\xi)$.

On voit que, pour tout entier $q \geqslant 0$:

$$x_1^q S_1 = i\omega(x) x_1^{q+1} P_1(D)\ E(x,\ \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (1/2;\ A_K^{q+1/2,\ 1/12}).$$

Prouvons, par récurrence sur p, que

$$x_1^q S_p \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (1/2;\ A_K^{q+p/2,\ 1/12})$$

pour tout entier $p \geqslant 1$. Pour cela, utilisons l'expression de $x_1^q S_p$ écrite au début. On a, en vertu de la récurrence sur p :

$$x_1^{q+1-r} S_{p-1} \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (1/2;\ A_K^{q+1-r+(p-1)/2,\ 1/12}),$$

et d'après ce que nous avons démontré plus haut :

$$x_1^r P_1(D)\ E(x,\ \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (1/2;\ A^{r-1/2, 1/12}).$$

Appliquons alors la proposition 1. 10 et la proposition 1. 14, et tenons compte du fait que

$$q + 1 - r + (p - 1)/2 + (r - 1/2) = q + p/2 :$$

on obtient exactement le résultat voulu.

En particulier, $S_p \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (1/2;\ A_K^{p/2})$; la progressivité de f en $\delta_x 1(\xi)$ résulte alors de la proposition 1. 16.

c. q. f. d.

L'intérêt de la définition 3. 2 provient du résultat suivant :

Théorème 3. 2. — *Soient* Ω *un ouvert de* R^n *et* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel sur* Ω. *Si* ${}^tP(x, D)$ *est de type progressif sur* Ω, $P(x, D)$ *est hypoelliptique sur* Ω.

Pour simplifier les écritures, nous échangerons les rôles de $P(x, D)$ et de ${}^tP(x, D)$. Nous supposerons $P(x, D)$ de type progressif et prouverons que ${}^tP(x, D)$ est hypoelliptique.

Soient alors $E(x, \xi)$ une distribution en (x, ξ), sur $R_x^n \times \Omega_\xi$, pouvant figurer dans la définition 3. 2 (associée à $P(x, D)$), un ouvert borné $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ quelconque. Soit $\omega(x) \in \mathcal{D}_x(\Omega - U)$ égale à 1 au voisinage de 0. Posons, pour $T \in (\mathcal{E}_\xi(U))\ (\mathcal{E}'_x)$:

$$f(T) = \omega(x)\, RP(x,\ \xi,\ D_x)\ [E(x,\ \xi) * T(x,\ \xi)];$$

ensuite : $S_0(x, \xi) = \delta_x 1(\xi)$, $S_p(x, \xi) = f(S_{p-1}(x, \xi))$ pour $p = 1, 2, \ldots$;
et :

$$E_q(x, \xi) = \sum_{j=0}^{q} S_j(x, \xi) * E(x, \xi), \qquad q = 0, 1, \ldots$$

Remarquons alors que $P(x + \xi, D) = P(\xi, D) - RP(x, \xi, D)$.
Par conséquent :

$$\omega(x)P(x + \xi, D)E_q(x, \xi) = \sum_{p=0}^{q} S_p(x, \xi) - S_{p+1}(x, \xi)$$
$$= S_0(x, \xi) - S_{q+1}(x, \xi) = \delta_x 1(\xi) - S_{q+1}(x, \xi).$$

Nous poserons

$$N_q(x, \xi) = E_q(x - \xi, \xi) \qquad \text{et} \qquad L_q(x, \xi) = S_{q+1}(x - \xi, \xi).$$

On a alors :

$$\omega(x - \xi)P(x, D)N_q(x, \xi) = \delta(x - \xi) - L_q(x, \xi).$$

D'après les propriétés de $\omega(x)$, tout point x_0 de U possède un voisinage ouvert $V(x_0)$ tel que $\omega(x)$ soit égale à 1 sur $V(x_0) - V(x_0)$. Fixons arbitrairement $x_0 \in U$ et posons $V = V(x_0)$. Pour $(x, \xi) \in V_x \times V_\xi$, on a $\omega(x - \xi) = 1$ et donc :

$$(3.4) \qquad P(x, D)N_q(x, \xi) = \delta(x - \xi) - L_q(x, \xi).$$

(I) Pour tout entier $\mu \geqslant 0$, on peut trouver un entier $q \geqslant 0$ tel que $L_q(x, \xi)$ soit une fonction C^μ de (x, ξ) dans $V_x \times V_\xi$.

En effet, puisque f est progressive en $\delta_x 1(\xi)$, pour tout $\mu \in N$, on peut trouver $q \in N$ tel que $S_{q+1}(x, \xi)$ soit une fonction $C^{2\mu}$ de (x, ξ) dans $R^n_x \times U_\xi$.

Utilisons maintenant la propriété (P_1) (définition 3. 2) de $E(x, \xi)$ et toutes les propriétés (maintes fois appliquées) des espaces $A^{r,d}$ et $\mathcal{E}_v(k; E_s)$: on voit qu'il existe un nombre $d > 0$ et un nombre $0 \leqslant k < 1$ et, pour chaque entier $q \geqslant 0$, un réel s_q tels que $E_q(x, \xi) \in (\mathcal{E}_\xi(U))\,(k; A^{s_q, d}_{loc})$. Ce fait a trois conséquences :

Pour tout $q \in N$, $E_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans U, à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$, et donc :

(II) Pour tout entier $q \geqslant 0$, $N_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de ξ dans V à valeurs dans $\mathcal{D}'_x(V)$.

D'après le corollaire 1 de la proposition 1. 17, $E_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans $\left(\complement \{0\}\right)_x \times U_\xi$, et donc :

(III) Pour tout entier $q \geqslant 0$, $N_q(x, \xi)$ est une fonction C^∞ de (x, ξ) dans le complémentaire de la diagonale, dans $V_x \times V_\xi$.

Enfin, par application du corollaire 1 de la proposition 1. 18 :

(IV) Pour tout entier $q \geqslant 0$, $N_q(x, \xi) \in \mathcal{E}_x(V)$ $(\mathcal{D}'_\xi(V))$, c'est-à-dire que $\varphi(\xi) \to \int N_q(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_\xi(\nu)$ dans $\mathcal{D}_x(V)$.

Un raisonnement bien connu, dû à Schwartz (voir [1], T. I, 2e édition, p. 137), permet de déduire l'hypoellipticité, dans V, de $P(x, D)$ à partir de l'équation (3. 4) et des faits (I), (II), (III) et (IV). Comme U est un ouvert borné arbitraire, tel que $\overline{U} \subset \Omega$, et comme ν_0 est un point arbitraire de U, ceci prouve l'hypoellipticité de $P(x, D)$ dans Ω.

APPENDICE

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.5

1. Le nombre m.

Désignons par $\mathfrak{B}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{C}$ engendré par les $b_0, b_1, \ldots, b_k, \ldots$. Puisque $\mathfrak{B}$ par hypothèse est de dimension finie, il existe un entier $\mu \geqslant 0$ tel que les $b_0, \ldots, b_\mu$ engendrent $\mathfrak{B}$ (remarquer que si on remplace « engendrent » par « constituent une base de », il se peut qu'il n'y ait aucun tel entier μ). Nous désignerons par m le plus petit entier μ ayant cette propriété. Alors, pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe $m + 1$ constantes complexes $c_k^j (j = 0, 1, \ldots, m)$ telles que $b_k = \sum_{j=0}^{m} c_k^j b_j$.

2. Plan de la démonstration.

La preuve va consister essentiellement en une cascade de récurrences. Les raisonnements seront tous parfaitement élémentaires; nous devons simplement nous préoccuper d'ordonner de façon correcte les récurrences.

Première récurrence.

Sur l'entier n, bien entendu. Bien que le résultat à démontrer ne soit énoncé, dans le lemme 2. 5, que pour $n \geqslant 1$, nous débuterons la récurrence à $n = 0$, avec la convention suivante, que si $n = 0$, l'ensemble d'indices $(s_1, \ldots, s_n)$ est vide et qu'alors $b_{s_1} \ldots b_{s_n} = 1$. La propriété s'énonce dans ce cas : $a_{r_1} \ldots a_{r_m} \in \mathfrak{A}$. Si m est lui aussi nul, nous conviendrons que l'ensemble d'indices $(r_1, \ldots, r_m)$ est vide et que $a_{r_1} \ldots a_{r_m} = 1$. Dans tous les cas, pour $n = 0$, le résultat est trivial.

Deuxième récurrence.

Le résultat à démontrer étant que, pour tout h, tous $r_2, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_1, \ldots, s_n$, on a $a_h a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$ (en supposant désormais $n \geqslant 1$), nous raisonnerons par récurrence sur h. Pour cela, il nous faudra démontrer cette appartenance lorsque $h = 0$.

Pour les références ultérieures, nous appellerons $(\mathrm{A}_{n,h})$ cette même appartenance dans le cas général (*i.e.* pour h quelconque).

Troisième récurrence.

Au lieu de démontrer directement $(\mathrm{A}_{n,h})$ nous démontrerons, pour tout $\mathrm{M} = 1, \ldots, m$, le fait suivant :

$(\mathrm{A}_{n,h,\mathrm{M}})$ On a, pour tous $r_{\mathrm{M}+1}, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_1, \ldots, s_n$,

$$a_h^{\mathrm{M}} a_{r_{\mathrm{M}+1}} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

On a $(\mathrm{A}_{n,h,1}) \equiv (\mathrm{A}_{n,h})$. Nous raisonnerons par récurrence *descendante* sur M; il nous faudra donc établir d'abord le résultat pour $\mathrm{M} = m$. Pour cela, à titre de résultat préliminaire, il nous faudra établir, pour tout $j = 0, 1, \ldots, m$, le fait suivant :

$(\mathrm{A}_{n,h;j})$ On a, pour tous $r_{j+2}, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_2, \ldots, s_n$,

$$a_h^{j+1} a_{r_{j+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Quatrième récurrence.

Nous démontrerons $(\mathrm{A}_{n,h;j})$ par récurrence (ascendante) sur j; il nous faudra donc commencer par prouver $(\mathrm{A}_{n,h;0})$.

Plan de la démonstration.

Nous prouverons, dans l'ordre : $(\mathrm{A}_{n,0;j})$, $j = 0, 1, \ldots, m$; $(\mathrm{A}_{n,0;\mathrm{M}})$, $\mathrm{M} = 1, \ldots, m$, ce qui donnera, pour $\mathrm{M} = 1$, $(\mathrm{A}_{n,0})$. Puis, pour $h \geqslant 1$, $(\mathrm{A}_{n,h;0})$; $(\mathrm{A}_{n,h;j})$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $(\mathrm{A}_{n,h,\mathrm{M}})$, $\mathrm{M} = 1, \ldots, m$, ce qui donnera, pour $\mathrm{M} = 1$, $(\mathrm{A}_{n,h})$.

3. Preuve de $(\mathrm{A}_{n,0;j})$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$.

$(\mathrm{A}_{n,0;0})$ est vrai. En effet, il s'exprime ainsi : pour tous $r_2, \ldots, r_{m+n}$ et tous $s_2, \ldots, s_n$, $a_0 b_0 a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$. Or, d'après l'équation (e_0), $a_0 b_0 = 1$; donc la récurrence sur n s'applique.

Prouvons $(A_{n,0;j})$ pour $j \geqslant 1$. Multiplions l'équation (e_j) par $a_0^j a_{r_{j+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \dots b_{s_n}$, ce qui donne

$$\sum_{q=0}^{j} \binom{j}{q} a_{j-q} a_0^j a_{r_{j+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \dots b_{s_n} = 0.$$

Dans la somme, le terme correspondant à q peut s'écrire, si $q \leqslant j - 1$, $\binom{j}{q} a_0^{q+1} a_{r_{q+2}} \dots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \dots b_{s_n}$ où certains des a_{r_α} $(\alpha \geqslant q + 2)$ peuvent être égaux à a_0. D'après la récurrence sur j, ce terme appartient à $\mathfrak{A}$. Il en résulte que le terme correspondant à $q = j$, doit, lui aussi, appartenir à $\mathfrak{A}$. Or ce terme est $a_0^{j+1} a_{r_{j+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \dots b_{s_n}$.

4. Preuve de $(A_{n,0,M})$ pour $M = m$.

Il suffit de prouver que, pour tous $r_{m+1}, \dots, r_{m+n}$ et tous $s_2 \dots s_n$, on a $a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_m b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$. En effet, d'après $(A_{n,0;j})$, on a, pour tout $j = 0, 1, \dots, m - 1$,

$$a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

On aura donc, pour tout s_1 :

$$a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_n} = \sum_{j=0}^{m} c_{s_1}^j a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_j b_{s_2} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Multiplions $(e_{m+r_{m+1}})$ par $a_0^m a_{r_{m+2}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \dots b_{s_n}$. Nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{m+r_{m+1}} \binom{m + r_{m+1}}{q} a_{m+r_{m+1}-q} a_0^m a_{r_{m+2}}, \dots, a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2}, \dots, b_{s_n} = 0.$$

Nous raisonnerons par récurrence sur r_{m+1}; les faits $(A_{n,0;j})$ impliquent que pour $r_{m+1} = 0$ et pour tous $r_{m+2}, \dots, r_{m+n}$ et tous $s_1, \dots, s_n$, $a_0^m a_{r_{m+1}} \dots a_{r_{m+n}} b_{s_1} \dots b_{s_n} \in \mathfrak{A}$ (en effet, $(A_{n,0;j})$ implique que cela est vrai pour $s_n = j$, $j = 0, 1, \dots, m$; cela est vrai alors pour tout s_n car les b_j, $j = 0, 1, \dots, m$, engendrent $\mathfrak{B}$). Supposons donc cette appartenance vérifiée jusqu'à $r_{m+1} \leqslant r - 1$ et prouvons-la pour $r_{m+1} = r$.

Dans la somme précédente, les termes correspondant à des indices $q \leqslant m - 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de $(A_{n,0;q})$. Quant aux termes correspondant à $q \geqslant m + 1$, ils sont aussi dans $\mathfrak{A}$

du fait que $m + r_{m+1} - q \leqslant r - 1$ (ici $r_{m+1} = r$) et que donc la récurrence sur r_{m+1} s'applique. Il s'ensuit que le terme correspondant à $q = m$ est aussi dans $\mathfrak{A}$. Ce terme est $\binom{m+r}{m} a_0^m a_{r_{m+1}} \ldots a_{r_{m+n}} b_m b_{s_2} \ldots b_{s_n}$.

5. **Preuve de** $(A_{n,0,M})$ **pour** $1 \leqslant M \leqslant m - 1$.

Nous raisonnerons par récurrence sur s_1; remarquons que pour $s_1 \leqslant M - 1$, le résultat découle de $(A_{n,0;j})$.

Nous raisonnerons aussi par récurrence sur r_{M+1}; d'après la récurrence descendante sur M, le résultat est vrai si $r_{M+1} = 0$.

Multiplions $(e_{s_1 + r_{M+1}})$ par $a_0^M a_{r_{M+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n}$. Nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{s_1 + r_{M+1}} \binom{s_1 + r_{M+1}}{q} a_0^M a_{s_1 + r_{M+1} - q} a_{r_{M+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \ldots b_{s_n} = 0.$$

Les termes correspondant à $q \leqslant s_1 - 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur s_n; ceux correspondant à $q \geqslant s_1 + 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ car alors $s_1 + r_{M+1} - q \leqslant r_{M+1} - 1$ et la récurrence sur r_{M+1} s'applique. Il s'ensuit que le terme correspondant à $q = s_1$ est dans $\mathfrak{A}$, et c'est ce que nous désirions.

6. **Preuve de** $(A_{n,h;0})$ **pour** $h \geqslant 1$.

Multiplions (e_h) par $a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n}$. Il vient :

$$a_h a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_0 b_{s_2} \ldots b_{s_n} + \sum_{q=1}^{h} \binom{h}{q} a_{h-q} a_{r_2} \ldots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \ldots b_{s_n} = 0.$$

Mais la somme du premier membre de cette équation est dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur h dans $(A_{n,h})$; donc le premier terme aussi est dans $\mathfrak{A}$.

7. **Preuve de** $(A_{n,h;j})$ **pour** $j = 1, \ldots, m$.

Multiplions (e_{j+h}) par $a_h^j a_{r_{j+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_{s_2} \ldots b_{s_n}$. Nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^{j+h} \binom{j+h}{q} a_{j+h-q} a_h^j a_{r_{j+2}} \ldots a_{r_{m+n}} b_q b_{s_2} \ldots b_{s_n} = 0.$$

Les termes correspondant à $q \leqslant j - 1$ sont dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur j; ceux correspondant à $q \geqslant j + 1$ sont

dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la récurrence sur h dans $(\mathrm{A}_{n,h})$. Il en résulte que le terme correspondant à $q = j$ est dans $\mathfrak{A}$ et c'est ce que nous désirions.

8. Preuve de $(\mathrm{A}_{n,h,\mathrm{M}})$ pour $\mathrm{M} = m$.

En raisonnant comme au n° 4, mais en s'appuyant ici sur $(\mathrm{A}_{n,h;j})$, on voit qu'il suffit de prouver que

$$a_h^m a_{r_{m+1}} \ldots a_{r_{m+n}} b_m b_{s_2} \ldots b_{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Ici comme au n° 4 on raisonne par récurrence sur r_{m+1} et la marche des raisonnements est identique à celle suivie dans le n° 4, avec a_h à la place de a_0, à ce détail près que le résultat pour $r_{m+1} = 0$ découle maintenant de $(\mathrm{A}_{n,0,1})$ (identique à $(\mathrm{A}_{n,0})$).

9. Preuve de $(\mathrm{A}_{n,h,\mathrm{M}})$ pour $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant m-1$.

On raisonne exactement comme au n° 5 en substituant a_h à a_0 et en utilisant $(\mathrm{A}_{n,h;j})$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ au lieu de $(\mathrm{A}_{n,0;j})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. E. Browder, Regularity theorems for solutions of partial differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 43, n° 2, 1956, p. 234.

[1] J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ *Ann. Inst. Fourier*, 1949, p. 61.

[1] L. Ehrenpreis, General theory of elliptic equations. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 42, n° 1, 1956, p. 39.

[1] L. Hörmander, On the theroy of general partial differential operators. *Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 160.

[2] L. Hörmander, On Interior Regularity of the Solutions of Partial Differential Equations. *Comm. pures and appl. Math.*, n° 2, 1958, p. 197.

[1] P. D. Lax, On Cauchy problem for hyperbolic equations... *Comm. pure and appl. Math.*, 1955, p. 615.

[1] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles. *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 271.

[2] B. Malgrange, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques. *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, 283.

[1] S. Mizohata, Hypoellipticité des équations paraboliques. *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, p. 15.

[2] S. Mizohata, Hypoellipticité des opérateurs différentiels elliptiques. *Nancy, C. R. du Colloque sur les Eq. Der. Part., C.N.R.S.*, p. 165.

[1] L. SCHWARTZ Théorie des distributions, t. I et II, Hermann, 2e éd., Paris, 1958.
[2] L. SCHWARTZ, Seminaire 1953-1954, Inst. H. Poincaré, Paris.
[3] L. SCHWARTZ, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *Journal d'Analyse Math.*, Jérusalem, t. 4, 1954-1955, p. 88-148.
[4] L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions à valeurs vectorielles. *Ann. Inst. Fourier*, 1957, t. 7, p. 1.
[7] L. SCHWARTZ, Séminaire 1954-1955, Inst. H. Poincaré, Paris.
[6] L. SCHWARTZ, Ecuaciones diferenciales parciales elipticas, Bogota, Colombia, 1956.
[7] L. SCHWARTZ, Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico. *Inst. Mat. Univ. di Genova*, 1957.
[1] F. TRÈVES, Domination et opérateurs paraboliques. *C. R. Acad. des Sc.*, t. 246, 1958.

ENSEMBLES $\mathcal{K}$-ANALYTIQUES ET $\mathcal{K}$-SOUSLINIENS CAS GÉNÉRAL ET CAS MÉTRIQUE

par **Gustave CHOQUET**, Paris.

Le cadre de la théorie classique des ensembles analytiques est celui fourni par les espaces métriques. Nous avons, dans un travail antérieur [1], tenté d'élargir ce cadre en appelant ensemble $\mathcal{K}$-analytique tout espace topologique séparé qui est image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact; nous avons également ébauché l'étude d'une autre classe d'ensembles, celle des ensembles $\mathcal{K}$-sousliniens.

Nous montrerons ici, d'abord que ces deux notions sont essentiellement équivalentes, puis que dans tout espace métrique, elles coïncident essentiellement avec la notion classique.

Ces deux faits contribuent à justifier l'extension proposée [2].

1. Rappel de notions sur l'opération (A).

L'opération (A) est une opération abstraite qui généralise les superpositions dénombrables de réunions et intersections dénombrables; elle sera notre outil de base.

Rappelons sa définition et ses propriétés [3].

[1] CHOQUET G. — Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953, ch. 1, pp. 138-145.

[2] Une autre justification est le fait que la théorie des capacités a pour cadre naturel les ensembles $\mathcal{K}$-analytiques.

[3] Pour l'étude de l'opération (A), voir W. SIERPINSKI, Algèbre des ensembles, *Monografie Matematycne*, t. 23, 1951, p. 185.

Soit S l'ensemble des suites *finies* d'entiers $\geqslant 1$:

$$(s = (n_1, n_2, \ldots, n_p)).$$

Soit Σ l'ensemble des suites *infinies* d'entiers $\geqslant 1$:

$$(\sigma = (n_1, n_2, \ldots)).$$

On écrit $s \prec \sigma$ (resp. $s \prec s'$) lorsque s est une section commençante de σ (resp. de s').

On écrit $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ lorsque pour tout p, l'élément de rang p de σ_1 est majoré par l'élément correspondant de σ_2. On définit de même $s_1 \leqslant s_2$, mais seulement pour deux suites s_1, s_2 dont les *longueurs* $|s_1|$ et $|s_2|$ sont égales.

Soit maintenant E un ensemble et $\mathcal{H}$ une partie de $\mathfrak{P}(E)$, stable par intersection dénombrable.

On appelle *système déterminant sur* $\mathcal{H}$ toute application Δ de S dans $\mathcal{H}$: $s \to H_s$, telle que $(s \prec s') \Longrightarrow (H_s \supset H_{s'})$.

On prolonge Δ à Σ en posant, pour tout $\sigma \in \Sigma$:

$$H_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma} H_s$$

On appelle *noyau* du système déterminant Δ l'ensemble

$$H(\Delta) = \bigcup_{\sigma} H_\sigma$$

Tout ensemble de la forme $H(\Delta)$ est appelé *$\mathcal{H}$-souslinien.* On désigne par $A(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous ces ensembles. On a évidemment $\mathcal{H} \subset A(\mathcal{H})$. On démontre ([3]) que $A(\mathcal{H})$ est stable par l'opération (A), autrement dit $A(A(\mathcal{H})) = A(\mathcal{H})$, et que $A(\mathcal{H})$ est stable par intersection dénombrable et par réunion dénombrable.

En particulier, si $B(\mathcal{H})$ désigne la plus petite partie de $(\mathfrak{P}E)$ contenant $\mathcal{H}$ et stable par réunion et intersection dénombrables (ses éléments sont dits $\mathcal{H}$-boréliens), on a $B(\mathcal{H}) \subset A(\mathcal{H})$.

Schéma de projection. — Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathfrak{P}(E)$ et soit $H(\Delta)$ son noyau.

Dans Σ on appellera *ilot d'indice* s (où $s \in S$) l'ensemble Σ_s des σ de Σ telles que $s \prec \sigma$.

On appelle *ensemble élémentaire d'indice* s la partie

$$G_s = \Sigma_s \times H_s \quad \text{de} \quad \Sigma \times E.$$

Pour tout entier p, on pose $\Gamma_p = \bigcup_{|s|=p} G_s$.

On pose enfin $\Gamma = \bigcap_p \Gamma_p$ et on dit que Γ est la partie de $\Sigma \times E$ associée canoniquement au système donné.

Il est immédiat que :

$$H(\Delta) = \text{projection de } \Gamma \text{ sur } E.$$

2. Espaces $\mathcal{K}$-analytiques.

Définition 1. — *Soit* A *un espace topologique. On dit que* A *est $\mathcal{K}$-analytique* si A *est séparé* [4] *et si* A *est l'image continue d'un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$ d'un espace compact; c'est-à-dire s'il existe un espace compact* F, *un ensemble* $B \subset F$ *qui soit un* $K_{\sigma\delta}$ *de* F, *et une application continue* f *de* B *sur* A.

Conséquences immédiates. — 1) Toute image continue séparée d'un espace $\mathcal{K}$-analytique est $\mathcal{K}$-analytique.

2) Toute image continue séparée d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace topologique séparé, est $\mathcal{K}$-analytique (utiliser le fait que ce $K_{\sigma\delta}$ est contenu dans un K_σ).

3) Tout fermé d'un espace $\mathcal{K}$-analytique est $\mathcal{K}$-analytique.

4) Tout produit topologique dénombrable d'espaces $\mathcal{K}$-analytiques est $\mathcal{K}$-analytique.

Proposition 1. — *Dans un espace séparé* E, *toute réunion ou intersection dénombrable d'ensembles $\mathcal{K}$-analytiques est $\mathcal{K}$-analytique.*

Plus généralement le noyau de tout système déterminant dont les éléments sont $\mathcal{K}$-analytiques est $\mathcal{K}$-analytique.

Démonstration. — Pour la première partie de la proposition, voir Choquet, *loc. cit.*

Pour la seconde partie, nous allons utiliser le schéma de projection introduit ci-dessus.

Soit (H_s) un système déterminant dont tout élément soit une partie $\mathcal{K}$-analytique de E.

L'espace $\Sigma = N^N$, muni de la topologie produit de N^N est

[4] Cette restriction semble inutile au début de la théorie, mais elle est indispensable à l'obtention des théorèmes essentiels.

homéomorphe à l'ensemble des irrationnels de $[0, 1]$; il en est de même de chaque étoile Σ_s; chaque Σ_s est un $K_{\sigma\delta}$ de $[0, 1]$ donc est $\mathcal{K}$-analytique; donc $G_s = \Sigma_s \times H_s$ l'est aussi, donc aussi Γ_p, puis Γ.

Le noyau $H(\Delta)$ est la projection de Γ sur E; il est donc aussi $\mathcal{K}$-analytique.

3. Ensembles $\mathcal{K}$-sousliniens.

Définition 2. — *Soit* E *un espace topologique séparé et soit* $A \subset E$. *On dit que* A *est* $\mathcal{K}$*-souslinien dans* E *si* A *est le noyau d'un système déterminant sur l'ensemble* $\mathcal{K}(E)$ *des compacts de* E.

Notons que le fait pour A d'être $\mathcal{K}$-souslinien n'est pas un invariant topologique; il dépend de l'espace E dans lequel est plongé A.

Conséquences immédiates. — 1) L'ensemble des ensembles $\mathcal{K}$-sousliniens dans E est stable par l'opération (A). 2) L'intersection d'un ensemble $\mathcal{K}$-souslinien dans E et d'un fermé de E est $\mathcal{K}$-souslinien dans E.

Invariance par application continue de E *dans* F.

Proposition 2. — *Soient* E *et* F *séparés. Soit* f *une application continue de* E *dans* F.

L'image par f *de tout ensemble* $\mathcal{K}$*-souslinien dans* E *est* $\mathcal{K}$*-souslinien dans* F.

C'est une conséquence immédiate du lemme plus précis suivant.

Lemme 1. — *On définit* E, F *et* f *comme dans la proposition* 2. *Soit* (H_s) *un système déterminant sur* $\mathcal{K}(E)$. *Alors* (H'_s), *défini par* $H'_s = f(H_s)$, *est un système déterminant sur* $\mathcal{K}(F)$ *et on a la relation :*

Noyau de $(f(H_s)) = f$ (*Noyau de* (H_s)).

Démonstration. — Comme F est séparé, tout $f(H_s)$ est compact; la décroissance de H_s est évidente.

Or pour toute suite décroissante (K_n) de compacts de E, il est connu que

$$\bigcap f(K_n) = f\left(\bigcap K_n\right).$$

Il en résulte que pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a $H'_\sigma = f(H_\sigma)$.

D'où
$$\bigcup_\sigma H'_\sigma = \bigcup_\sigma f(H_\sigma) = f\Big(\bigcup_\sigma H_\sigma\Big).$$

C'est bien la relation cherchée.

4. Comparaison des ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens.

Lemme 2. — *Soit* E *un espace séparé; soit* A *une partie* $\mathcal{K}$*-analytique de* E *contenue dans un* K_σ. *Alors* A *est la projection sur* E *d'un* $K_{\sigma\delta}$ *de l'espace produit de* E *et d'un espace compact auxiliaire.*

Voir la démonstration dans Choquet, *loc. cit.*

Lemme 3. — *Tout* $K_{\sigma\delta}$ *d'un espace séparé* E *est* $\mathcal{K}$*-souslinien dans* E.

C'est un cas particulier du fait que tout ensemble $\mathcal{K}$-borélien est $\mathcal{H}$-souslinien.

Théorème 1. — *Soit* X *une partie d'un espace séparé* E; *pour que* X *soit* $\mathcal{K}$*-souslinien dans* E, *il faut et il suffit que* X *soit* $\mathcal{K}$*-analytique et contenu dans un* K_σ *de* E.

Démonstration. — 1) Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathcal{K}(E)$, de noyau X. On a évidemment $X \subset \bigcup H_n$, donc X est dans un K_σ.

D'autre part, tout H_s est $\mathcal{K}$-analytique; il en est donc de même de X d'après la proposition 1.

2) Si X est $\mathcal{K}$-analytique et contenu dans un K_σ, il résulte de la proposition 2 et des lemmes 2 et 3, que X est $\mathcal{K}$-souslinien dans E.

Corollaire 1. — *Pour qu'un espace* $\mathcal{K}$*-analytique soit plongeable dans une espace dans lequel il soit* $\mathcal{K}$*-souslinien, il faut et il suffit qu'il soit plongeable dans un espace séparé qui soit un* K_σ.

Il serait intéressant de montrer par un exemple que tout espace $\mathcal{K}$-analytique n'est pas plongeable dans un K_σ et de trouver des critères simples pour qu'il en soit ainsi.

Notons qu'il est faux que tout espace $\mathcal{K}$-analytique soit plongeable dans un compact, puisqu'il existe des espaces dénombrables non compactifiables.

5. Cas des espaces métriques.

Définition 3. — *On appelle* espace analytique classique *tout espace métrisable à base dénombrable qui soit l'image continue de* N^N (*homéomorphe à l'ensemble des irrationnels de* $[0, 1]$).

Théorème 2. — *Pour qu'un espace métrisable soit* analytique classique, *il faut et il suffit qu'il soit $\mathcal{K}$-analytique.*

Corollaire 2. — *Soit* X *une partie d'un espace métrisable* E. *Pour que* X *soit $\mathcal{K}$-souslinien dans* E, *il faut et il suffit qu'il soit analytique classique et contenu dans un* $\mathcal{K}_\sigma$ *de* E.

Corollaire 3. — *Tout espace $\mathcal{K}$-analytique métrisable est plongeable dans un espace compact métrisable* (*dans lequel il est $\mathcal{K}$-souslinien*).

Ces corollaires sont des conséquences simples des théorèmes 1 et 2.

Démonstration du théorème 2 :

1) L'ensemble des irrationnels de $[0, 1]$ est un $K_{\sigma\delta}$ de $[0, 1]$; donc tout espace analytique du sens classique est $\mathcal{K}$-analytique.

2) Soit E un espace $\mathcal{K}$-analytique métrisable.

a) Montrons d'abord que E est à base dénombrable.

Soit $\tilde{E}$ un espace compact contenant E (il existe de tels $\tilde{E}$, en général non métrisables). D'après le théorème 1, E est $\mathcal{K}$-souslinien dans $\tilde{E}$, c'est-à-dire est le noyau d'un système déterminant (H_s) de compacts de $\tilde{E}$.

Soit ε un nombre > 0; nous dirons qu'un H_s est ε-fini s'il existe un recouvrement de $E \cap H_s$ par une famille finie de boules ouvertes de E de rayon ε pour une métrique choisie sur E. Posons :

$H'_s = \emptyset$ si H_s est ε-fini; $H'_s = H_s$ dans le cas contraire.

Les H'_s constituent un système déterminant de compacts;

si son noyau n'est pas vide, il existe un H'_σ non vide; cet H'_σ est de la forme :

$$\begin{aligned} H'_\sigma &= H'_{n_1} \cap H'_{n_1, n_2} \ldots \cap H'_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \cap \ldots \\ &= H_{n_1} \cap H_{n_1, n_2} \ldots \cap H_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \cap \ldots \end{aligned}$$

D'autre part H'_σ est un compact de E, donc métrisable; il existe donc un recouvrement de H'_σ par une famille finie de boules ouvertes ω_i de E, de rayon ε. L'ensemble $\bigcup \omega_i$ est la trace sur E d'un ouvert Ω de $\tilde{E}$; il existe un entier p tel que :

$$H_{n_1, \ldots, n_p} \subset \Omega \qquad \text{donc aussi} \qquad E \cap H_{n_1, \ldots, n_p} \subset \bigcup \omega_i,$$

autrement dit $H_{n_1, \ldots, n_p}$ est ε-fini, d'où $H'_{n_1, \ldots, n_p} = \emptyset$, contrairement à l'hypothèse.

Cette contradiction montre que le noyau de (H'_s) est vide; il èxiste donc un entier p tel que, pour toute s de longueur $\geqslant p$, H'_s soit vide, c'est-à-dire que H_s soit ε-fini.

Il n'y a qu'un infinité dénombrable de telles suites s, donc E peut être recouvert par une famille dénombrable de boules de rayon ε.

b) Comme E est à base dénombrable, il possède une compactification $\tilde{E}$ métrique. Donc E est le noyau d'un système déterminant (H_s) de compacts d'un espace métrique compact.

La théorie classique montre alors que E est image continue de $\Sigma = N^N$. Voici une esquisse de démonstration de ce fait bien connu :

On montre d'abord que l'on peut remplacer (H_s) par un autre système dans lequel aucun H_s n'est vide, puis celui-ci par un autre dans lequel tout H_s est non vide et a un diamètre (dans $\tilde{E}$) qui tend vers 0 avec $|s|$.

La partie Γ de $\Sigma \times \tilde{E}$ associée canoniquement à un tel système (H_s) est évidemment le graphe d'une application continue φ de Σ dans $\tilde{E}$ et l'on a :

$$E = \text{proj.}\ (\Gamma) = \varphi(\Sigma).$$

FORME ABSTRAITE DU THÉORÈME DE CAPACITABILITÉ,

par Gustave CHOQUET, Paris.

Le théorème établissant la capacitabilité des ensembles boréliens et analytiques semble à première vue ne pas pouvoir prendre une forme abstraite (c'est-à-dire ne faisant pas appel à la topologie) puisque les ensembles analytiques sont définis comme images continues de certains ensembles; et en fait la démonstration utilise [1] les notions de produit d'espaces topologiques et de compacité.

Cependant nous allons voir qu'on peut donner à ce théorème une forme et une démonstration purement abstraites. On y gagnera en généralité et en simplicité.

Le passage de ce théorème abstrait au théorème antérieur s'obtient grâce à un théorème reliant les notions d'ensemble $\mathcal{K}$-analytique et d'ensemble $\mathcal{K}$-souslinien [2].

A côté de l'énoncé général, nous en donnerons un autre qui, sous des conditions plus faibles, fournit la capacibilité d'ensembles qui sont, dans notre cadre abstrait, l'équivalent des $K_{\sigma\delta}$.

1. Théorème de base.

DÉFINITION 1. — *Soit* E *un ensemble; soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathfrak{P}(E)$, *stable par réunion finie et intersection dénombrable, et telle que* $\emptyset \in \mathcal{H}$.

(1) CHOQUET, *Theory of capacities*, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 5, 1953, ch. 6, pp. 221-224.

(2) CHOQUET, *Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique*, dans ce même fascicule.

On appelle capacité abstraite *sur* $(E, \mathcal{H})$ *toute application* croissante f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$, *telle que:*

1) *Pour toute suite* décroissante (H_n) *d'éléments de* $\mathcal{H}$, *on ait*

$$(1) \qquad f\left(\bigcap H_n\right) = \lim f(H_n).$$

2) *Pour toute suite* croissante (X_n) *de parties de* E, *on ait*

$$(2) \qquad f\left(\bigcup X_n\right) = \lim f(X_n).$$

Exemples. — 1) $\mathcal{H}$ est un σ-corps de parties de E; f est la mesure extérieure associée à une mesure positive finie et dénombrablement additive sur $\mathcal{H}$.

2) E est l'espace $R^n (n \geqslant 3)$; $\mathcal{H}$ est l'ensemble des compacts de E; f est la capacité extérieure associée au noyau de Riesz $r^{\alpha-n} (0 < \alpha \leqslant 2)$.

Définition 2. — *Une partie* X *de* E *est dite* $(f, \mathcal{H})$*-capacitable* (*ou plus simplement capacitable*) *si*

$$f(X) = \sup_{\substack{H \subset X \\ H \in \mathcal{H}}} f(H)$$

Évidemment, pour toute suite croissante (X_n) d'ensembles capacitables, la réunion des X_n est capacitable; en particulier comme tout $X \in \mathcal{H}$ est capacitable, toute réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{H}$ l'est aussi. Le problème consiste maintenant à trouver une vaste classe d'autres ensembles capacitables.

Il est évident que si l'on compose f avec une application continue φ strictement croissante de $\overline{R}$ dans $\overline{R}$, les théories relatives à f et $\varphi(f)$ sont isomorphes. Nous en profiterons pour supposer dans la démonstration qui suit, que f est bornée.

Nous allons utiliser ici des propriétés de l'opération (A); nous renvoyons à un travail antérieur [2] pour la terminologie, les notations et le rappel de ces propriétés.

Théorème 1. — *Soit f une capacité abstraite sur* $(E, \mathcal{H})$. *Tout ensemble* $\mathcal{H}$*-souslinien de* E *(donc en particulier tout ensemble* $\mathcal{H}$*-borélien) est* $(f, \mathcal{H})$ *capacitable.*

Démonstration. — Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathcal{H}$, et soit A son noyau.

Pour tout $s \in S$, posons :

$$A_s = \bigcup_{s \prec \sigma} H_\sigma \qquad \text{puis} \qquad B_s = \bigcup_{s' \leqslant s} A_{s'}.$$

On a les relations :

$$A = \bigcup_n A_n \qquad \text{et} \qquad A_s = \bigcup_n A_{s,n} \text{ [3]},$$

d'où

$$(3) \qquad B_s = \bigcup_{\substack{s' \leqslant s \\ n}} A_{s',n}.$$

Donnons nous un nombre $\varepsilon > 0$.

De $A = \bigcup_n A_n$ et de la relation (2) résulte qu'il existe un entier a_1 tel que

$$f(B_{a_1}) > f(A) - \varepsilon/2.$$

Supposons définis les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$. Des relations (2) et (3) résulte qu'il existe un entier a_p tel que

$$f(B_{a_1, a_2, \ldots, a_p}) > f(B_{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}}) - \varepsilon/2^p.$$

Par addition, ces inégalités donnent

$$(4) \qquad f(B_{a_1, a_2, \ldots, a_p}) > f(A) - \varepsilon.$$

Posons $$L_s = \bigcup_{s' \leqslant s} H_s;$$

pour tout s, on a $A_s \subset H_s$, d'où $B_s \subset L_s$.

La relation (4) donne donc

$$(5) \qquad f(L_{a_1, a_2, \ldots, a_p}) > f(A) - \varepsilon.$$

Or la suite $(L(p) = L_{a_1, \ldots, a_p})$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{H}$. Posons $L = \bigcap_p L(p)$; c'est un élément de $\mathcal{H}$. La relation (5) donne :

$$f(L) = \lim f(L(p)) > f(A) - \varepsilon.$$

Donc si l'on peut montrer que $L \subset A$, on aura bien montré que A est capacitable.

[3] Nous désignerons par (s, n) la suite finie formée en prolongeant la suite s par l'élément n.

Désignons par α la suite infinie $(a_1, a_2, \ldots)$ et par α_p la suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$; on a :

$$L = \bigcap L(p) = \bigcap_p \Big(\bigcup_{s \leqslant \alpha_p} H_s \Big) = \bigcup_{\sigma \leqslant \alpha} H_\sigma \subset \bigcup H_\sigma = A.$$

De ces relations, la seule non évidente est l'égalité du milieu; c'est une relation algébrique connue qui se démontre facilement en utilisant le fait que, pour tout p, les s qui sont $\leqslant \alpha_p$ sont en nombre fini.

2. Capacitabilité individuelle.

Définition 3. — *Soit* E *un ensemble et soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathfrak{P}(E)$, *stable par intersection dénombrable.*

Soit f *une application croissante de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $\overline{R}$, *vérifiant la condition* (1) *de la définition* 1.

On appelle suite privilégiée *toute suite* croissante (H_n) *d'éléments de* $\mathcal{H}$ *telle que, pour tout* $X \subset E$, *on ait :*

$$f\Big(\bigcup (X \cap H_n)\Big) = \lim f(X \cap H_n). \tag{2'}$$

On désigne par $\mathcal{H}'_\sigma$ *l'ensemble des parties de* E *qui sont réunion d'une telle suite et par* $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$ *l'ensemble des* $A \subset E$ *de la forme* $A = \bigcap_n A_n$ où $A_n \in \mathcal{H}'_\sigma$.

Théorème. — *Avec les notations de la définition* 3, *tout élément de* $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$ *est* $(f, \mathcal{H})$-*capacitable.*

Démonstration. — Elle est calquée sur une démonstration antérieure (Choquet, *loc. cit.*) :

Soit $A \in \mathcal{H}'_{\sigma\delta}$. On peut écrire $A = \bigcap A_n$ avec $A_n = \bigcup_p A_n^p$, où la suite $p \to A_n^p$ est pour tout n une suite privilégiée.

Soit ε un nombre > 0.

Posons $a_1^p = A \cap A_1^p$; d'après $(2)'$ on a :

$$f(A) = f\Big(\bigcup a_1^p\Big) = \lim f(a_1^p).$$

Donc il existe p_1 tel que

$$f(A) - f(a_1^{p_1}) < \varepsilon/2.$$

Supposons défini $a_n^{p_n} \subset A$.

Posons $a_{n+1}^p = a_n^{p_n} \cap A_{n+1}^p$; d'après (2)′ il existe p_{n+1} tel que

$$f(a_n^{p_n}) - f((a_{n+1}^{p_{n+1}}) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Ajoutons les n premières inégalités ainsi obtenues; on obtient :

$$f(A) - f(a_n^{p_n}) < \varepsilon.$$

La suite $(a_n^{p_n})$ est décroissante; posons $a_\varepsilon = \bigcap a_n^{p_n}$;

d'où $$a_\varepsilon = A \cap \left[\bigcap A_n^{p_n}\right].$$

Or $A_n^{p_n} \subset A_n$, d'où $\bigcap A_n^{p_n} \subset A$, d'où $a_\varepsilon = \bigcap A_n^{p_n}$.

Ainsi, d'une part $a_\varepsilon \in \mathcal{H}$; d'autre part, si on pose $B_n = \bigcap_1^n A_n^{p_n}$ la relation $a_\varepsilon = \bigcap B_n$ entraîne d'après (1) que

$$f(a_\varepsilon) = \lim f(B_n) \geqslant \lim f(a_n^{p_n}) > f(A) - \varepsilon.$$

Donc $$f(A) = \sup_{\substack{H \subset A \\ H \in \mathcal{H}}} f(H),$$

ce qui démontre le théorème.

Application. — Nous montrerons dans un autre travail que si E est un espace compact, N une application de $E \times E$ dans $[0, +\infty]$, semi-continue inférieurement, et continue hors de la diagonale de $E \times E$, et si f désigne la N-capacité extérieure associée à ce noyau N, on peut appliquer à f le théorème 2.

Plus précisément, si on prend pour $\mathcal{H}$ l'ensemble des compacts de E, on montre que toute suite (H_n) d'éléments de $\mathcal{H}$ qui est *régulièrement croissante* (4) *est privilégiée.* En particulier, si tout ouvert de E est un F_σ, tout G_δ de E appartient à $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$; il en résulte que tout G_δ et tout F_σ de E sont capacitables. Ce résultat suffit aux besoins de la théorie du potentiel.

3. Extensions du théorème 1.

Le théorème 1 ne couvre pas l'ensemble des cas dans lesquels on a besoin d'un théorème de capacitabilité. Il est peu

(4) La suite (H_n) est dite *régulièrement croissante* si elle est croissante et si tout H_n possède un voisinage V_n tel que $V_n \cap H_p$ soit constant à partir d'un certain p

commode d'énoncer un théorème contenant toutes les variantes possibles; il vaut mieux, dans chaque cas particulier, essayer d'adapter la démonstration du théorème 1. Nous ne donnerons ici que les indications pour quelques extensions possibles; nous n'envisagerons pas le cas des capacités à valeurs vectorielles ou à valeurs dans un ensemble ordonné.

1) La capacité f peut n'être définie que sur une partie de $\mathfrak{P}(E)$. Plus précisément, soit E un ensemble et soient $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathfrak{P}(E)$.

On suppose que $\mathcal{H}$ est stable par réunion finie et intersection dénombrable et que $\mathcal{G}$ contient la réunion de toute suite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$.

Une capacité abstraite sur $(E, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ est une application croissante f de $\mathcal{G}$ dans $\overline{R}$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la définition 1 (dans (2) on suppose en outre que $X_n \in \mathcal{G}$).

La capacitabilité d'un élément de $\mathcal{G}$ se définit comme dans la définition 2.

Suivant les cas, deux voies sont possibles :

a) Si $\mathcal{G}$ est stable par intersection dénombrable, on étend f à $\mathfrak{P}(E)$ en posant, pour tout $X \subset E$:

$$f(X) = \inf_{\substack{X \subset G \\ G \in \mathcal{G}}} f(G).$$

On vérifie que f est alors une capacité abstraite sur $(E, \mathcal{H})$ et l'on peut appliquer le théorème 1.

b) Si $\mathcal{G}$ contient tout ensemble $\mathcal{H}$-souslinien, on peut reprendre mot pour mot la démonstration du théorème 1 et montrer que tout ensemble $\mathcal{H}$-souslinien est capacitable.

Application. — Soit A un ensemble et $\mathcal{G}_0$ l'ensemble des applications de A dans $\overline{R}$; on désigne par $\mathcal{H}_0$ une partie de $\mathcal{G}_0$ stable par les opérations « enveloppe supérieure finie » et « enveloppe inférieure dénombrable » (par exemple les fonctions semi-continues inférieurement lorsque A est topologique).

Soit f_0 une application croissante de $\mathcal{G}_0$ dans $\overline{R}$ telle que, pour toute suite décroissante (φ_n) d'éléments de $\mathcal{H}_0$ (resp. croissante d'éléments de $\mathcal{G}_0$), on ait

$$f_0(\lim \varphi_n) = \lim f_0(\varphi_n).$$

Pour étudier la capacitabilité associée à f, on se ramène au schéma ensembliste suivant : On pose $E = A \times \overline{R}$; on appelle $\mathcal{G}$ l'ensemble des parties X de E qui sont réunion de demi-droites $x \times [-\infty, a]$ ou $x \times [-\infty, a[$; il existe une application canonique $X \to \varphi_X$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}_0$; on appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des X de $\mathcal{G}$ tels que $\varphi_X \in \mathcal{H}_0$.

Si l'on pose enfin : $f(X) = f_0(\varphi_X)$, la fonction f est une capacité abstraite sur $(E, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ et on vérifie immédiatement qu'on est ici à la fois dans les cas a) et b).

2) On peut donner au théorème 1 une formulation plus abstraite en supposant que la capacité f n'est plus définie sur $\mathfrak{P}(E)$ mais sur un ensemble ordonné :

Soient P un ensemble ordonné (pour la relation $\prec$), $\mathcal{H}$ une partie de P et f une application croissante de P dans $\overline{R}$. On dit que l'élément a de P est capacitable si

$$f(a) = \sup_{\substack{x \prec a \\ x \in \mathcal{H}}} f(x).$$

On suppose définies sur P une notion de suite croissante (resp. décroissante) convergente ; et en oûtre une application $(a, x) \to (a \frown x)$ de $P \times \mathcal{H}$ dans P.

Si ces diverses notions satisfont à quelques conditions destinées à remplacer les conditions (1) et (2) de la définition (1), on montre que tout $x \in \mathcal{H}_{\sigma\delta}$ est capacitable (c'est-à-dire un x qui est limite d'une suite décroissante de limites de suites croissantes d'éléments de $\mathcal{H}$).

Si on suppose en oûtre que P est réticulé, dénombrablement vers le bas, de façon complète vers le haut, avec une distributivité convenable, on peut définir une notion d'éléments $\mathcal{H}$-sousliniens de P, et montrer leur capacitabilité.

SUR LES POINTS D'EFFILEMENT D'UN ENSEMBLE APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA CAPACITÉ

par Gustave CHOQUET, Paris.

Nous montrerons dans le théorème 1, que tout ensemble est rare, en un sens que nous préciserons, au voisinage de l'ensemble des points où il est effilé.

Puis nous en déduirons que tout ensemble, après soustraction d'un petit ensemble convenable, a même capacité extérieure que sa fermeture; nous énoncerons ce résultat sous des formes plus ou moins restrictives suivant la nature de l'ensemble et nous montrerons la validité de ces énoncés pour une classe de fonctions d'ensemble assez vaste, mais qui ne contient cependant pas toutes les capacités alternées d'ordre infini.

Pour ne pas compliquer les énoncés, nous les formulerons d'abord dans un espace de Green E, toutes les notions étant alors relatives au noyau de Green G de E. Nous dirons ensuite à quels noyaux s'étendent les divers énoncés.

Donc, jusqu'à mention du contraire, E désignera un espace de Green.

1. Effilement et capacité associés à un noyau.

THÉORÈME 1 [1]. — *Soit* X *une partie quelconque de* E, *Soit* $e(X)$ *l'ensemble des points* x *de* E *tels que* X *soit effilé en* x.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $\omega \subset E$ *tel que:*

$$e(X) \subset \omega \quad \textit{et} \quad \operatorname{cap}^*(X \cap \omega) < \varepsilon.$$

[1] M. BRELOT, à qui j'avais signalé cet énoncé, a trouvé un principe de démonstration différent, basé sur l'existence d'un potentiel qui, en tout point d'effilement, a sur X une quasi-limite infinie.

Corollaire (*bien connu*). — 1) *L'ensemble des points de* X *en lesquels* X *est effilé a une capacité extérieure nulle; autrement dit:*

$$\mathrm{cap}^*(X \cap e(X)) = 0.$$

2) $(\mathrm{cap}^* X = 0) \Longleftrightarrow$ (X *est effilé en chacun de ses points*).

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 1. Il a été énoncé pour la première fois par M. Brelot (voir bibliographie).

Démonstration du théorème 1. — Rappelons une propriété assez connue caractérisant les points d'effilement (énoncée sous une forme voisine par de la Vallée-Poussin) :

Pour que X *soit effilé en* x, *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage* V *de* x *tel que le potentiel capacitaire* [2] *de* $X \cap V$ *soit* < 1 *en* x.

S'il existe un tel voisinage de x, tout sous-voisinage possède la même propriété; nous dirons qu'un tel voisinage isole x de X.

Soit alors (O_n) une base dénombrable d'ouverts de E. Pour tout n, soit E_n l'ensemble des points de O_n en lesquels le potentiel capacitaire de $(X \cap \omega_n)$ est < 1.

La caractérisation rappelée ci-dessus des points d'effilement montre que l'ensemble $\bigcup E_n$ est identique à l'ensemble $e(X)$ des points x de E en lesquels X est effilé. C'est évidemment un F_σ; l'ensemble $\tilde{X} = \complement e(X)$ est un G_δ qu'on appelle *fermeture fine* de X (c'est la fermeture pour la topologie fine de E).

On a $\mathrm{cap}^* \tilde{X} = \mathrm{cap}^* X$; et plus généralement, pour tout ouvert ω, on a $\mathrm{cap}^*(\tilde{X} \cap \omega) = \mathrm{cap}^*(X \cap \omega)$ [3].

Soit Φ_n le potentiel capacitaire de $X \cap O_n$; il existe [4] un ouvert $\omega_n \subset E$ contenant les points de $X \cap O_n$ en lesquels $\Phi_n < 1$, tel que $\mathrm{cap}\, \omega_n < \varepsilon/2^n$ et tel que la restriction de Φ_n à $\complement \omega_n$ soit continue.

Posons :

$$(1) \quad Y = X \cap \complement\left(\bigcup \omega_n\right), \quad \text{ce qui entraîne} \quad \bar{Y} \cap \left(\bigcup \omega_n\right) = \emptyset.$$

[2] On appelle potentiel capacitaire de A le plus petit des potentiels qui valent 1 quasi-partout sur A.

[3] En effet $(X \cap \omega) \subset (\tilde{X} \cap \omega) \subset$ (ens. des points où le potentiel capacitaire de $X \cap \omega$ vaut 1).

[4] Utiliser par exemple le théorème 1 de la note Choquet I.

Pour tout $x \in Y$ et pour tout n, on a $\Phi_n(x) = 1$; comme Φ_n est continu hors de ω_n, on a donc aussi $\Phi_n(x) = 1$ pour tout $x \in \overline{Y}$; autrement dit on a :

$$\overline{Y} \cap e(X) = \emptyset. \tag{2}$$

Posons $\omega = \complement \overline{Y}$; la relation (2) donne $e(X) \subset \omega$. La relation (1) donne :

$$X \cap \omega \subset \bigcup \omega_n \qquad \text{d'où} \qquad \text{cap}^* (X \cap \omega) \leqslant \text{cap} \left(\bigcup \omega_n\right) < \varepsilon.$$

Théorème 2. — *Soit* $X \subset E$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition de* X *en deux ensembles* X_1, X_2 *tels que :*

1) $$\text{cap}\, \overline{X}_1 \leqslant \text{cap}^*\, X.$$
2) $$\text{cap}^*\, X_2 < \varepsilon$$

Lorsque $\text{cap}^* X < \infty$, *on peut imposer en outre à* X_1 *d'être borné.*

Démonstration. — D'après le théorème 1, il existe un ouvert ω contenant $e(X)$ et tel que $\text{cap}^*(X \cap \omega) < \varepsilon$. Posons :

$$X_2 = X \cap \omega \qquad \text{et} \qquad X_1 = X \cap \complement X_2 = X \cap \complement \omega.$$

On a donc

$$\overline{X}_1 \subset \complement \omega, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{X}_1 \subset \tilde{X}.$$

Donc $$\text{cap}\, \overline{X}_1 \leqslant \text{cap}^*\, \tilde{X}_1 = \text{cap}^*\, X.$$

Enfin, par hypothèse, $\text{cap}^*\, X_2 = \text{cap}\,(X \cap \omega) < \varepsilon$.

Lorsque $\text{cap}^* X < \infty$, X est réunion d'un ensemble borné et d'un ensemble de capacité extérieure $< \varepsilon$; la dernière partie du théorème résulte donc aisément de la première.

Extension à d'autres noyaux. — Les théorèmes 1 et 2 s'étendent sans modification aux noyaux N satisfaisant à toutes les conditions suivantes :

Soit E un espace localement compact à base dénombrable.

1) N est un noyau sur E, semi-continu inférieurement, $\geqslant 0$, continu hors de la diagonale Δ de $E \times E$ et valant $+\infty$ sur Δ.

2) N est symétrique et satisfait au principe du maximum ordinaire (ce qui entraîne qu'il est régulier, de type positif, et satisfait au principe de l'équilibre.

3) N satisfait au principe de domination (donc aussi au principe du balayage) et au principe de positivité des masses [5].

4) N tend vers 0 à l'infini en ce sens que, pour tout compact $K \subset E$, $\sup_{x \in K} N\varepsilon_x(a)$ tend vers 0 quand a tend vers le point à l'infini de E.

5) E n'est effilé en aucun de ses points.

Le fait que les théorèmes 1 et 2 s'étendent à ces noyaux est immédiat dès qu'on a vérifié que la théorie classique du potentiel s'étend à ces noyaux.

2. Fonctions d'ensemble stabilisables.

Le théorème 2 suggère d'étudier les capacités pour lesquelles il est vrai. Nous verrons qu'il ne s'étend pas à toutes les capacités alternées d'ordre infini.

Par contre nous montrerons que les capacités stabilisables, et même plus généralement les fonctions d'ensemble stabilisables (au sens de la définition qui suit) possèdent des propriétés intéressantes qui précisent le théorème 2.

Définition. — *Soit* E *un espace topologique.*

Soit f *une application* croissante *de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $[0, +\infty]$.

1) *Nous dirons que* f *est* stabilisable *si, pour tout* $X \subset E$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition de* X *en deux ensembles* X_1 *et* X_2 *tels que*

$$f(\overline{X_1}) \leqslant f(X) \quad \text{et} \quad f(X_2) < \varepsilon.$$

2) *Nous dirons qu'une partie* X *de* E *est* stable *pour* f *si* $f(X) = f(\overline{X})$.

Le théorème 2 exprime que la capacité extérieure de Green est stabilisable; il en est de même des capacités associées aux noyaux N signalés ci-dessus.

Capacités alternées d'ordre infini et non stabilisables.

Un exemple va nous montrer que la propriété d'être stabilisable n'appartient pas à certaines capacités alternées d'ordre infini.

[5] C'est-à-dire que si $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ et $N\mu \geqslant N\nu$ partout, on a aussi $\mu(E) \geqslant \nu(E)$.

Dans le plan $E = R^2$, soit D la droite $y = 0$. Pour tout compact $K \subset R^2$, on désigne par $pr_D . K$ la projection de K sur D. Puis on pose :

$$f(K) = \text{mesure de Lebesgue de } (K \cap D) + \text{mesure de Lebesgue de } (pr_D . K).$$

Évidemment f est une capacité alternée d'ordre infini; on peut même ajouter qu'elle est associée au schéma probabiliste suivant, particulièrement régulier :

Soient E et F deux espaces identiques à R^2; dans $E \times F$ on pose :

$$A = \text{diagonale} \bigcup \left(\text{ensemble des points } ((x, y), (x, 1))\right).$$

Dans F, soit μ la somme des mesures de Lebesgue associées aux droites $y = 0$ et $y = 1$.

Il est immédiat que f est la capacité dans E associée à ce schéma (Choquet II, p. 209).

Notons sa régularité : La fibre $A \cap (m \times F)$ est une fonction continue du point m (où $m \in E$).

Or, malgré la régularité de f, elle n'est pas stabilisable; en effet, posons dans $E = R^2$:

$$X = ([0, 1]) \times ([0, 1]).$$

Pour toute partition de X en X_1 et X_2, on a :

$$f(\overline{X}_1) \geqslant 2(1 - f^*(X_2)).$$

Donc si $f^*(X_2) < \varepsilon$, on a $f(\overline{X}_1) \geqslant 2 - 2\varepsilon$, alors que $f^*(X_1) \leqslant 1$.

Théorème 3. — *Soit E un espace topologique et soit f une application croissante et stabilisable de $\mathfrak{P}(E)$ dans $[0, +\infty]$. On suppose f dénombrablement sous-additive (c'est-à-dire $f\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \Sigma f(A_n)$).*

Alors, pour tout $X \subset E$ et pour tout $\varepsilon < 0$, il existe une partition de X en deux ensembles X_1 et X_2 tels que

$$X_1 \textit{ soit stable} \quad \text{et} \quad f(X_2) < \varepsilon$$

Démonstration. — Posons $Z_1 = X$ et supposons défini Z_n. Comme f est stable, il existe $D_n \subset Z_n$ tel que, si l'on pose $Z_{n+1} = Z_n \cap \complement D_n$, on ait :

$$f(D_n) < \varepsilon/2^n \quad \text{et} \quad f(\overline{Z}_{n+1}) \leqslant f(Z_n).$$

La suite (Z_p) est décroissante; posons $Z = \bigcap Z_p$.

On a $Z_n = Z \cup \left(\bigcup_n^{\infty} D_p\right)$ d'où :

$$f(Z_n) \leqslant f(Z) + \varepsilon/2^{n-1}. \tag{1}$$

D'autre part $\overline{Z} \subset \overline{Z}_{n+1}$ d'où :

$$f(\overline{Z}) \leqslant f(\overline{Z}_{n+1}) \leqslant f(Z_n). \tag{2}$$

On tire de (1) et (2) :

$$\lim f(Z_n) \leqslant f(Z) \leqslant f(\overline{Z}) \leqslant \lim f(Z_n).$$

Donc Z est stable.

Les ensembles $X_1 = Z$ et $X_2 = \bigcup_p D_p$ constituent la partition cherchée de X.

Remarque. — On peut évidemment toujours supposer dans l'énoncé que X_1 est fermé relativement à X, donc X_2 ouvert relativement à X.

Corollaire. — *On fait les mêmes hypothèses sur* E *et* f. *Pour tout* $X \subset E$ *et pour tout* $\varepsilon < 0$, *il existe une partition de* X *en ensembles* X_∞ *et* X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *tels que*

1) *Les* X_n *sont stables et* $\Sigma f(X_n) \leqslant f(X) + \varepsilon$.

2) $f(X_\infty) = 0$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 3. Les théorèmes 4 et 5 nous montreront qu'on peut dans certains cas imposer la condition supplémentaire $X_\infty = \emptyset$. Nous allons montrer par deux exemples que, même lorsque f est la capacité classique, on ne peut pas dans cet énoncé, imposer pour tout X, à la fois que $X_\infty = \emptyset$ et que les X_n soient stables.

Principe de la construction. — Soit $X \subset E$ tel que

a) X n'est pas de 1re catégorie en lui-même, c'est-à-dire n'est pas réunion dénombrable de sous-ensembles non-denses dans X.

b) Toute partie stable Y de X est non dense dans X.

Un tel X n'est évidemment pas réunion dénombrable de sous-ensembles stables.

Nous allons donner des exemples de tels ensembles X dans $E = R^3$, pour la capacité newtonienne.

1) *Exemple d'un* X *de capacité nulle.* — Il suffit de prendre pour X un G_δ partout dense dans R^3 et de capacité extérieure nulle.

2) *Exemple d'un* X *de capacité finie non nulle.* — Dans R^3, soit (D_n) une suite de disques circulaires fermés de centres (o_n), de rayons (r_n), tels que l'ensemble des o_n soit partout dense dans R^3 et tels que pour tout n, si d_n désigne la distance de o_n à $(D_1 \cup D_2 \ldots \cup D_{n-1})$, on ait $r_n \leqslant d_n/10^n$. On pose $D = \bigcup D_n$, puis $X = \tilde{D}$, fermeture fine de D.

Le fait que X convient tient à ce que

1) X est un G_δ partout dense dans R^3.

2) Pour tout ouvert ω, les capacités de $D \cap \omega$ et $\tilde{D} \cap \omega$ sont égales.

3) L'ensemble D est assez rare dans R^3.

Partitions dénombrables stables. — En vue des théorèmes 4 et 5, nous allons démontrer trois lemmes :

LEMME 1. — *Soit* X *un espace topologique normal et soit* f *une application croissante de* $\mathfrak{P}(X)$ *dans* $\overline{R}$.

Soient A_1 *et* A_2 *deux fermés disjoints de* X; *il existe alors deux ouverts* disjoints ω_1 *et* $\omega_2 \subset X$ *tels que :*

1) $A \subset \omega_1$ et $A_2 \subset \omega_2$.

2) $\overline{\omega}_1 \cup \omega_2 = \omega_1 \cup \overline{\omega}_2 = X$.

3) ω_1 et ω_2 *sont stables pour* f.

Démonstration. — Comme X est normal, il existe une application continue φ de X dans [0, 1], qui vaut 0 sur A_1 et 1 sur sur A_2.

Posons $X_1(\lambda) = \varphi^{-1}([0, \lambda])$; la fonction $\psi(\lambda) = f(X_1(\lambda))$ est une fonction croissante de λ; donc elle possède au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité; il en est de même pour la capacité de $\varphi^{-1}([\lambda, 1])$.

Donc il existe $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que :

$$f(\varphi^{-1}([0, \lambda_0[)) = f(\varphi^{-1}([0, \lambda_0]))$$

et

$$f(\varphi^{-1}(]\lambda_0, 1])) = f(\varphi^{-1}([\lambda_0, 1])).$$

Les ouverts cherchés sont

$$\omega_1 = (\mathring{X}_1(\lambda_0)) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \complement \overline{\omega}_1.$$

Ils ont même frontière.

LEMME 2. — *Soit* E *un espace topologique normal dans lequel tout ouvert est une réunion dénombrable de fermés.*

Pour tout couple de fermés $A_1, A_2 \subset E$, *il existe deux ouverts disjoints* ω_1, ω_2, *contenant respectivement* $A_1 \cap \complement A_2$ *et* $A_2 \cap \complement A_1$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du fait que dans E, tout ouvert est normal. L'espace $\complement(A_1 \cap A_2)$ est donc normal et on peut y séparer les ensembles $A_1 \cap \complement A_2$ et $A_2 \cap \complement A_1$ relativement fermés par deux ensembles ω_1, ω_2 disjoints et relativement ouverts, donc aussi ouverts.

COROLLAIRE. — *Avec les mêmes hypothèses sur* E, *soit* Ω *un ouvert de* E *et soit* $B \subset \Omega$.

Il existe un ouvert ω *tel que :*

$$B \subset \omega \subset \Omega \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega} \cap \Omega^* = \overline{B} \cap \Omega^*$$

(*où* Ω^* *désigne la frontière de* Ω).

Il suffit de poser dans le lemme précédent :

$$A_1 = \overline{B} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \complement\,\Omega, \qquad \text{puis de prendre} \qquad \omega = \omega_1.$$

LEMME 3. — *Soit* E *un espace topologique normal dans lequel tout ouvert est une réunion dénombrable de fermés.*

Soit f *une application croissante de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $[0, +\infty]$, *stabilisable, dénombrablement sous-additive et telle que :*

(1) *si* $A \subset B$ *et si* $f(A) = f(B)$, *on a* $f(A \cup C) = f(B \cup C)$ *pour tout* C [6].

Soit Ω *un ouvert de* E (*pour tout* $Y \subset \Omega$, *on posera* $\widehat{Y} = \overline{Y} \cap \Omega$); *et soit* $X \subset \Omega$, *tel que* $X = \widehat{X}$.

Pour tout voisinage ouvert V *de* Ω^* *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\omega_1, \omega_2 \subset X$, *relativement ouverts dans* X *et tels que :*

1) $f(\omega_1) = f(\hat{\omega}_1) = f(\overline{\omega}_1)$.

2) $f(\omega_2) = f(\hat{\omega}_2) < \varepsilon$ *et* $\hat{\omega}_2 \subset V$.

3) $X \subset \hat{\omega}_1 \cup \omega_2$ *et* $X \subset \omega_1 \cup \hat{\omega}_2$.

Démonstration. — D'après le théorème 3, il existe une partition de X en Y_1, Y_2 tels que Y_1 soit stable et $f(Y_2) < \varepsilon$.

[6] Cette condition est satisfaite pour toute capacité alternée d'ordre 2, donc en particulier pour les capacités associées aux noyaux N signalés après l'énoncé du théorème 2.

Posons $Z_1 = Y_1 \cup (X \cap \complement V)$ et $Z_2 = Y_2 \cap V$; c'est une nouvelle partition de X.

Comme $X \cap \complement V$ est fermé, on a $\overline{Z_1} = \overline{Y_1} \cup (X \cap \complement V)$. Or $Y_1 \subset \overline{Y_1}$ et $f(Y_1) = f(\overline{Y_1})$; donc d'après la relation (1) de l'énoncé, on a aussi $f(Z_1) = f(\overline{Z_1})$.

Donc Z_1 est stable et $f(Z_2) < \varepsilon$, avec de plus $Z_2 \subset V$. D'après la remarque au théorème 3, nous pouvons supposer que $\widehat{Y}_1 = Y_1$, d'où aussi $\widehat{Z}_1 = Z_1$.

D'après le corollaire du lemme 2, appliqué à $B = Z_1$, il existe un ouvert ω tel que $Z_1 \subset \omega \subset \Omega$ et

$$\overline{\omega} \cap \Omega^* = \overline{Z_1} \cap \Omega^*. \tag{2}$$

Posons, dans le lemme 1, $A_1 = Z_1$ et $A_2 = X \cap \complement \omega$. D'après ce lemme, il existe dans X, ω_1 et ω_2 disjoints et relativement ouverts dans X, avec

1) $A_1 \subset \omega_1$ et $A_2 \subset \omega_2$.
2) $\overline{\omega_1} \cup \omega_2 = \omega_1 \cup \overline{\omega_2} = X$.
3) $f(\hat{\omega}_1) = f(\omega_1)$ et $f(\hat{\omega}_2) = f(\omega_2)$.

a) On a $Z_1 \subset \omega_1 \subset \omega$, donc $\overline{Z_1} \cap \Omega^* \subset \overline{\omega_1} \cap \Omega^* \subset \overline{\omega} \cap \Omega^*$. D'après (2), ceci entraîne l'égalité de ces trois quantités.

Donc $\overline{\omega_1} = \hat{\omega}_1 \cup (\overline{\omega_1} \cap \Omega^*) = \hat{\omega}_1 \cup (\overline{Z_1} \cap \Omega^*)$.

Or $$\overline{Z_1} = Z_1 \cup (\overline{Z_1} \cap \Omega^*).$$

En outre $f(Z_1) = f(\overline{Z_1})$; d'après la relation (1) (appliquée à Z_1, $\overline{Z_1}$ et $\hat{\omega}_1$) on a donc $f(\hat{\omega}_1) = f(\overline{\omega_1})$; comme $f(\hat{\omega}_1) = f(\omega_1)$, on a donc finalement

$$f(\omega_1) = f(\hat{\omega}_1) = f(\overline{\omega_1}).$$

b) On a $\hat{\omega}_2 \cap Z_1 = \hat{\omega}_2 \cap A_1 = \emptyset$ d'où $\omega_2 \subset \hat{\omega}_2 \subset Z_2 \subset V$ d'où aussi $f(\omega_2) = f(\hat{\omega}_2) < \varepsilon$ et $X_2 = \widehat{X}_2 \subset V$.

Remarque. — Le lemme 3 est inutilement précis pour la démonstration du théorème 4, mais il permet d'améliorer l'énoncé de ce théorème lorsque f est la capacité associée au noyau de Green d'un espace de Green E.

THÉORÈME 4. — *Faisons sur* E *et* f *les mêmes hypothèses que dans le lemme* 3.

Soit X *une partie* localement fermée *de* E. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partition dénombrable* (X_n) *de* X *telle que :*

1) *Pour tout* n, X_n *est localement fermé et stable pour* f.

2) $\Sigma f(X_n) \leqslant f(X) + \varepsilon$.

3) *Pour tout compact* K *de* X *disjoint de* X^*, *il n'y a qu'une sous-famille finie des* X_n *qui rencontre* K.

Démonstration. — Soit X^* la frontière de X; posons $\Omega = \complement X^*$. Comme X est localement fermé, on a $X \subset \Omega$ et $X = \widehat{X}$ (avec les notations du lemme 3).

Comme Ω est réunion dénombrable de fermés, il existe une suite décroissante (V_n) de voisinages ouverts de Ω^* dont l'intersection ne rencontre pas Ω.

Posons $Y_1 = X$ et supposons défini $Y_n \subset X$ tel que $Y_n = \widehat{Y}_n$. D'après le lemme 3, il existe $X_n \subset Y_n$, relativement ouvert dans Y_n, tel que, si l'on pose $Y_{n+1} = Y_n \cap \complement X_n$, on ait :

$$f(X_n) = f(\overline{X}_n) \quad \text{et} \quad Y_{n+1} \subset V_{n+1} \quad \text{avec} \quad f(Y_{n+1}) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Les X_n constituent une partition de X vérifiant les propriétés 1) et 2). Pour que la propriété 3) soit satisfaite, il suffit de supposer les V_n tels que $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$, ce qui est toujours possible.

Remarque. — Lorsque E est un espace de Green et f la capacité de Green correspondante, on peut imposer en outre que, pour tout n, l'intérieur de X_n (relativement à X) soit stable et partout dense dans X_n.

Application aux ensembles quelconques.

Théorème 5. — *Mêmes hypothèses sur* E *et* f.

Soit X *une partie quelconque de* E *telle que*

$$f(X) = \inf_{X \subset \omega} f(\omega) \qquad \textit{(ou } \omega \textit{ désigne un ouvert).}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une partition dénombrable* (X_n) *de* X *telle que*

$$\Sigma f(\overline{X}_n) < f(X) + \varepsilon.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que X est contenu dans un ouvert X′ tel que $f(X') < f(X) + \varepsilon$ et d'appliquer le théorème 4 à X′, qui est localement fermé.

CAS PARTICULIER. — *Pour tout* X *tel que* $f(X) = 0$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un recouvrement de* X *par une suite* (A_n) *de fermés tels que* $\sum f(A_n) < \varepsilon$.

Lorsque E est réunion dénombrable de compacts, on peut remplacer dans cet énoncé le mot « fermés » par « compacts ». L'exemple 1 montre qu'on ne peut pas imposer toujours à ces compacts d'avoir une capacité nulle.

BIBLIOGRAPHIE

M. BRELOT. — Sur les ensembles effilés, *Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, p. 12-36.

H. CARTAN. — Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Ann. Univ. Grenoble, Math. Phys.*, t. 22, 1946, p. 221-280.

G. CHOQUET I. — Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C. R.* t. 244, 1957, p. 1606-1609.

II. — Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, t. V, 1953, p. 131-292.

SUR LES G_δ DE CAPACITÉ NULLE [1]

par Gustave CHOQUET, Paris.

Pour toute application semi-continue inférieurement f d'un espace topologique dans la droite achevée $\overline{R}$, l'ensemble I_f des x tels que $f(x) = +\infty$ est un G_δ. C'est en particulier le cas si f est le potentiel N_μ d'une mesure $\mu \geqslant 0$ lorsque N est un noyau $\geqslant 0$ semi-continu inférieurement sur E localement compact (comme c'est le cas pour le noyau newtonien de $R^p (p \geqslant 3)$); mais on peut affirmer alors de plus que I_f est de capacité extérieure nulle [2].

Inversement, J. Deny a montré [3] que dans $R^p (p \geqslant 3)$, pour le noyau newtonien N, tout ensemble A qui est un G_δ de capacité extérieure nulle est l'ensemble des infinis d'un potentiel $N_\mu (\mu \geqslant 0)$; mais la mesure μ construite par Deny n'est pas portée par A; on peut ajouter cette restriction lorsque A est compact (G. C. Evans) [4] ou contenu dans un F_σ de capacité nulle (N. Ninomya) [5].

On va établir ici l'énoncé le plus précis; pour simplifier l'exposé, nous supposerons partout que le noyau étudié est le noyau newtonien de $E = R^p$.

(1) Ce mémoire développe un résultat annoncé dans :
G. Choquet, Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, *C. R.*, t. 244, 1957, p. 1710-1712.

(2) G. Choquet, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C. R.*, t. 244, 1957, p. 1606-1609.

(3) J. Deny. Sur les infinis d'un potentiel, *C. R.*, t. 224, 1947, p. 524.

(4) G. C. Evans, *Monatshefte fur Math. u. Phys.* Bd 43, 1936, p. 419-424.

(5) N. Ninomya, Sur un ensemble de capacité nulle. *Math. J. Okoyama Univ.*, 2, n° 2, 1953.

Puis nous indiquerons pour terminer à quels autres noyaux s'étend le théorème obtenu.

Lemme 1. — *Soient* μ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* E; K *un compact de* E; φ *une fonction numérique continue sur* E, *telle que* $N\mu > \varphi$ *sur* K.

Il existe un voisinage ouvert ω_1 *de* μ (*dans l'espace* $\mathcal{M}_+(E)$ *des mesures* $\mu \geqslant 0$ *sur* E, *muni de la topologie vague*) *et un voisinage* ω_2 *de* K *dans* E, *tels que pour tout* $(\nu, x) \in \omega_1 \times \omega_2$ *on ait :*

$$N\nu(x) > \varphi(x).$$

En termes plus simples, si $N\mu(x) > \varphi(x)$ pour tout $x \in K$, l'inégalité reste vraie lorsqu'on modifie un peu μ, et un peu K.

En effet, l'application $(\nu, x) \to N\nu(x)$ de $\mathcal{M}_+(E) \times E$ dans $\overline{R}_+$ est semi-continue inférieurement; donc l'ensemble Ω des (ν, x) tels que $N\nu(x) - \varphi(x) > 0$ est ouvert dans $\mathcal{M}_+(E) \times E$. Or Ω contient $\mu \times K$, donc aussi un ouvert de la forme $\omega_1 \times \omega_2$ (en vertu de la compacité de K).

Définition. — *Pour tout ouvert* ω *de* E, *on appelle* recouvrement régulier *de* ω *une suite* (K_n) *de compacts de* ω *telle que*

a) *Pour tout* n, $\mathring{K}_n$ *est partout dense dans* K_n.

b) $\omega = \bigcup_n \mathring{K}_n$.

c) $K_i \cap K_j = \emptyset$ *pour* $|i - j| > 1$.

Il est bien connu que tout ouvert de R^p admet un tel recouvrement régulier.

Lemme 2. — *On se donne un ouvert* $\omega \subset E$; *une partie* X *de* ω; *une mesure* $\lambda \geqslant 0$ *portée par* $\overline{X} \cap \omega$; *une fonction numérique* φ *définie et continue dans* ω, *telle que* $N\lambda > \varphi$ *dans* ω.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ *et tout voisinage* V *de* λ (*dans* $\mathcal{M}_+(E)$), *il existe* $\mu \in V$, *portée par un sous-ensemble de* X *fini sur tout compact de* ω, *et telle que :*

1) $N\mu > \varphi - \varepsilon$ [6] *sur* ω.

2) $|N\mu - N\lambda| < \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$ *(là où la différence est définie).*

3) $\mu(E) = \lambda(E)$.

[6] Lorsque $\overline{\omega}$ est compact, on peut remplacer cette inégalité par $N\nu > \varphi$.

Démonstration. — Soit (K_n) un recouvrement régulier de ω; par commodité pour la suite, on posera $K_0 = \emptyset$.

Soit (λ_n) une partition (facile à réaliser) de λ en mesures $\lambda \geqslant 0$ telles que :

$$S\lambda_n \subset K_n, \qquad \text{donc aussi} \qquad S\lambda_n \subset \overline{X} \cap K_n$$

(où $S\lambda_n$ désigne le support de λ_n).

Comme N est continu hors de la diagonale de $E \times E$ et tend vers 0 à l'infini, il existe pour tout $n \geqslant 1$ un voisinage U_n de λ_n dans $\mathcal{M}_+(\overline{X} \cap K_n)$ tel que, pour toute $\mu_n \in U_n$ on ait :

$$(1) \quad |N\mu_n - N\lambda_n| < \varepsilon/2^n \qquad \text{sur} \qquad \Big(\bigcup_{\substack{i<n-1 \\ \text{ou } i>n+1}} K_i\Big) \cup (\complement\omega).$$

D'autre part, comme $N\Big(\sum\limits_{\substack{i<n-1 \\ i>n+1}} \lambda_i\Big)$ est continu sur K_n, il existe pour tout $n \geqslant 1$, d'après le lemme 1, des voisinages V_{n-1}^{-1}, V_n^0, V_{n+1}^1 de λ_{n-1}, λ_n, λ_{n+1} respectivement, dans $\mathcal{M}_+(E)$, tels que les relations : $\mu_{n-1} \in V_{n-1}^{-1}$, $\mu_n \in V_n^0$, $\mu_{n+1} \in V_{n+1}^1$ entraînent

$$(2) \quad N\Big(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1} + \sum_{\substack{i<n+1 \\ i>n+1}} \lambda_i\Big) > \varphi \quad \text{sur } K_i.$$

Pour tout $p \geqslant 1$, choisissons maintenant

$$\mu_p \in U_p \cap V_p^{-1} \cap V_p^0 \cap V_p^1, \qquad \text{avec en outre} \qquad \mu_p(E) = \lambda_p(E).$$

Posons $\mu = \sum\limits_p \mu_p$; on a $\lambda(E) = \mu(E)$.

Des relations (1) et (2) on tire successivement :

$$|N\mu - N\lambda| < \varepsilon \quad \text{sur} \quad \complement\omega,$$
$$N\mu > \varphi - \varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Enfin, comme $X \cap \mathring{K}_n$ est partout dense dans $\overline{X} \cap K_n$, on peut toujours prendre μ_n à support fini contenu dans $X \cap K_n$.

La condition $\mu \in V$ est automatiquement réalisée si l'on choisit les U_p et V_p assez petits.

Remarque. — Comme le support de μ est fini sur tout compact de ω, $N\mu$ est fini et continu en tout point de ω, sauf aux points de l'ensemble (dénombrable et fermé relativement à ω) qui porte μ, à savoir $\omega \cap S\mu$.

LEMME 3. — *Soit* ω *un ouvert de* E, *de capacité* $< \infty$. *Pour tout* $X \subset \omega$ *et tout nombre* $\varepsilon > 0$, *il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *portée par une partie* Y *de* X *dont la trace sur tout compact de* ω *est finie et telle que :*

1) $\mu(E) < a$.

2) $N\mu > 1$ *sur* $\overline{X} \cap \omega$.

3) $N\mu < 1 + \varepsilon$ *sur* $\complement \omega$.

On dit qu'une telle μ *est* associée *à* $(a, \varepsilon, \omega, X)$; *son potentiel est partout fini hors de* X.

Démonstration. — 1) Montrons d'abord qu'il existe une mesure $\pi \geqslant 0$ portée par $\overline{X} \cap \omega$ et telle que :

$\pi(E) < a$; $N\pi > (1 - \varepsilon)$ quasi-partout sur $\overline{X} \cap \omega$; $N\pi \leqslant 1$ partout.

Si cap $(\overline{X} \cap \omega) = 0$, on prend $\pi = 0$; sinon soit ν la distribution capacitaire de $\overline{X} \cap \omega$.

On a $\nu = \nu' + \nu''$, où ν' est portée par ω^* et ν'' est portée par $\overline{X} \cap \omega$.

Comme $N\nu' \leqslant 1$ partout et que N est un noyau régulier, on peut écrire $\nu' = \sum_n \nu_n$, où pour tout n on a : $\nu_n \geqslant 0$; $S\nu_n$ compact; $N\nu_n$ continu.

Soit ν_n^K la balayée de ν_n sur le compact K de $\overline{X} \cap \omega$; on a : $\nu_n = \lim \nu_n^K$ suivant l'ordonné filtrant croissant de ces compacts [7] K.

Soit C_n un compact assez grand pour que $N\nu_n < \varepsilon/2^n$ hors de C_n. Comme $N\nu_n$ est continu, il existe d'après le lemme 1 un compact $K_n \subset \overline{X} \cap \omega$, tel que

$$N\nu_n^{K_n} > N\nu_n - \varepsilon/2^n \text{ sur } C_n.$$

Cette inégalité est évidemment vraie aussi hors de C_n puisque $N\nu_n^{K_n} \geqslant 0$. On a donc partout dans E :

$$N\nu_n - \varepsilon/2^n < N\nu_n^{K_n} \leqslant N\nu_n.$$

D'où par addition :

$$(1) \qquad N\nu' - \varepsilon < N(\Sigma\nu_n^{K_n}) \leqslant N\nu'.$$

[7] En effet, si ν_n' désigne une valeur d'adhérence des ν_n^K, on a d'après le théorème classique de convergence : $N\nu_n' = 1$ quasi-partout sur $\overline{X} \cap \omega$ et $\nu_n'(E) \leqslant \nu^n(E)$. Il en résulte $\nu_n' = \nu_n$ à cause de l'unicité de la distribution capacitaire de $\overline{X} \cap \omega$.

Posons $\pi = \nu'' + \sum_n \nu_n^{K_n}$; la relation (1) devient :

$$N\nu - \varepsilon < N\pi \leqslant N\nu \leqslant 1.$$

Comme par ailleurs $\pi(E) \leqslant \nu(E) < a$, la mesure π a les propriétés annoncées.

2) L'ensemble A des points de $\overline{X} \cap \omega$ en lesquels $N\pi < 1$ est un F_σ de capacité nulle. Posons $A = \bigcup A_n$, où les A_n sont des compacts de $\overline{X} \cap \omega$.

D'après la propriété d'Evans, il existe une mesure $\varkappa_n \geqslant 0$ portée par A_n, de masse $< \varepsilon/2^n$, avec $N\varkappa_n = +\infty$ sur A_n, et $N\varkappa_n < \varepsilon/2^n$ sur $\complement\omega$.

Donc $\lambda = \pi + \Sigma\varkappa_n$ est portée par $\overline{X} \cap \omega$; elle a une masse totale $< a$ si ε est assez petit; son potentiel est $> (1 - \varepsilon)$ sur $\overline{X} \cap \omega$ et $< (1 + \varepsilon)$ sur $\complement\omega$.

On va maintenant utiliser le lemme 2. Comme $N\lambda > (1 - \varepsilon)$ sur $(\overline{X} \cap \omega)$, il existe une fonction numérique continue φ sur ω, égale à $(1 - \varepsilon)$ sur $\overline{X} \cap \omega$ et telle que $N\mu > \varphi$ partout dans ω. Donc d'après le lemme 2, il existe $\mu \geqslant 0$ portée par un sous-ensemble de X fini sur tout compact de ω, et telle que :

$$\mu(E) < a; \quad N\mu > 1 - 2\varepsilon \text{ sur } \overline{X} \cap \omega; \quad N\mu \leqslant 1 + 2\varepsilon \text{ sur } \complement\omega.$$

La mesure $\mu/(1 - 2\varepsilon)$ répond à la question, après un changement élémentaire du ε.

Il est immédiat que $N\mu$ est partout fini hors de X.

Lemme 4. — *Soit ω un ouvert de* E; *soit* $A \subset \omega$, *avec* $\text{cap}^* A = 0$; *soit* $X \subset A$ *avec* X *partout dense dans* A; *et soit ε un nombre* > 0.

Il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ portée par une partie dénombrable de X *et telle que :*

$\mu(E) < \varepsilon$; $N\mu \geqslant 1$ *sur* A; $N\mu < \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$; $N\mu$ *est finie hors de* X.

Démonstration. — Soit (K_n) un recouvrement régulier de ω. Soit ε_n une constante > 0 assez petite pour que toute mesure positive portée par K_n et de masse totale $< \varepsilon_n$ ait un potentiel $< \varepsilon/2^n$ sur $\complement\omega$.

Posons $A_n = A \cap \mathring{K}_n$ et $X_n = X \cap \mathring{K}_n$.

Comme $\text{cap}^* A_n = 0$, il existe un ouvert $\omega_n \subset \overset{\circ}{K}_n$ tel que

$$A_n \subset \omega_n \quad \text{et} \quad \text{cap}\,\omega_n < \varepsilon'_n = \inf(\varepsilon_n, \varepsilon/2^n).$$

Soit μ_n une mesure associée à $(\varepsilon'_n, \varepsilon/2^n, \omega_n, X_n)$.

Posons $\mu = \Sigma\mu_n$; on vérifie aisément toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé.

On peut même ajouter que μ est portée par un ensemble dont tout point est isolé.

Théorème. — *Soit* $A \subset E$, *où* A *est un* G_δ *non vide de capacité extérieure nulle.*

Il existe une mesure $\mu > 0$ *portée par* A, *dont le potentiel* $N\mu$ *est infini en tout point de* A *et fini hors de* A.

Plus précisément, pour tout X *dénombrable* $\subset A$, *tel que* $\overline{X} = \overline{A}$, *on peut imposer à* μ *d'être portée par* X.

Démonstration. — Posons $A = \bigcap \omega_n$, où la suite des ouverts ω_n est décroissante. D'après le lemme 4, il existe une mesure μ_n portée par X et telle que :

$\mu_n(E) < 1/2^n$; $N\mu_n \geqslant 1$ sur A; $N\mu_n < 1/2^n$ sur $\complement\,\omega_n$; $N\mu_n$ est finie hors de X.

Posons $\mu = \Sigma\mu_n$. On a $\mu(E) < 1$ et $N\mu = +\infty$ sur A. Enfin, pour tout $x \notin A$, il existe n_0 tel que $x \notin \omega_n$ (pour tout $n \geqslant n_0$). On a donc :

$$N\mu(x) = \Sigma N\mu_n(x) \leqslant \sum_{1}^{n_0-1} N\mu_n(x) + \sum_{n_0}^{\infty} 1/2^n < \infty.$$

Espaces et noyaux auxquels s'étend le théorème.

Nous ne rechercherons pas la généralité maxima; les conditions qui vont être données montreront que le théorème est valable pour tous les « bons » noyaux de la théorie du potentiel, en particulier pour les noyaux de Green et les noyaux $r^{\alpha-p}$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ dans R^p $(p \geqslant 3)$.

On verrait aisément qu'il est valable aussi dans R^2 pour le noyau logarithmique (bien qu'il ne soit pas positif), à cause du fait que, localement, ce noyau est un « bon » noyau.

Conditions suffisantes. — E est un espace localement compact à base dénombrable.

Le noyau N est une application continue de $E \times E$ dans $[0, +\infty]$, finie hors de la diagonale Δ, infinie sur Δ.

N est symétrique et satisfait au principe du maximum ordinaire.

N satisfait au principe du balayage (ou, ce qui est équivalent, au principe de domination).

N tend vers 0 à l'infini, en ce sens que, pour tout compact $K \subset E$, $\sup_{a \in K} N\varepsilon_a(x)$ tend vers 0 lorsque a tend vers le point à l'infini de E.

Notons que la symétrie de N n'a rien d'indispensable et n'est imposée ici que pour simplifier l'énoncé des conditions.

TANGENTIALSTRUKTUREN

von Friedrich-Wilhelm BAUER.

EINLEITUNG

In [1], [2] haben wir Fortsetzungstheorie von Homologiestrukturen behandelt und sind dabei von dem folgenden Problem ausgegangen:

(1) Sei A eine V-Kategorie [1] (z.B. alle polyedralen Teilmengen des R^n) und $\mathfrak{v}$ eine Homologiestruktur (z.B. die simpliziale). Ist $B \supset A$ eine andere V-Kategorie, (z.B. alle Teilmengen des R^n), gibt es eine Homologiestruktur $\mathfrak{w}$, die auf B erklärt ist und auf A mit $\mathfrak{v}$ zusammenfällt und wie viele gibt es?

In [1] wurde diese Frage unter der Einschränkung gelöst, daß die zur Konkurrenz zugelassenen Homologiestrukturen « atomar » sind, d.h. daß es gewisse kleinste Elemente (i.polyedralen Falle sind es die Zyklen) gibt, die ganze $\mathfrak{v}$ erzeugen. In [1] wurde das Problem (1) in dem Sinne gelöst, daß es ein maximales, d.h. projektives $\mathfrak{v}^*$ in B gibt.

Eng verbunden mit (1) ist das folgende Problem:

(2) Sind $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ in A isomorph, kann man dann $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ so bestimmen, daß sie auch in B isomorph sind und auf wieviele Arten kann das geschehen?

Man kann z.B. den Alexander-Pontrjaginschen Dualitätssatz für beliebige Teilmengen des R^n, wie er von K. Sitnikow

(1) Bezüglich der Bezeichnungen s. [1], [2].

gefunden wurde, als Fortsetzung einer solchen Isomorphie auffassen.

Etwas allgemeiner kann man unseren Gedankengang, der uns bei unserer Untersuchung der Fragen (1) und (2) leitete, auch so beschreiben:

Wir gehen aus von einer einfachen Homologiestruktur, die sich, wie etwa die simpliziale, leicht übersehen läßt, und geben ein rein algebraisches Verfahren an, wie man aus ihr neue, kompliziertere herstellen und deren Eigenschaften untersuchen kann.

In dieser Arbeit sollen Strukturen untersucht werden, die die Homologiestrukturen unmittelbar verallgemeinern. Wir nannten sie « Tangentialstrukturen » aus dem Grunde, weil ein Spezialfall durch die differenzierbar in den R^n eingebetteten Mannigfaltigkeiten gegeben wird. Zur Überleitung auf die Tangentialstrukturen sei folgendes bemerkt:

Wir erinnern uns daran, daß man eine atomare Homologiestruktur $\mathfrak{v}$ als eine teilweise geordnete Menge $\mathfrak{v}(A)$ beschreiben kann, die einen gewissen Verband (nämlich gerade die V-Kategorie A) als Normbereich hat. Ist $X \in A$, so ist das Urbild von X unter dieser Normabbildung gerade $H_q(X)$, die Homologiegruppe von X in einer festen Dimension q. Bei der Behandlung von Homologiestrukturen werden wir darauf noch kurz eingehen. Jetzt verallgemeinern wir in konsequenter Weise:

Definition 0.1. — *Sei* P *eine teilweise geordnete Menge mit Nullelement*, $N(P) = N \subset P$ *eine Teilmenge von* P, A *ein Verband mit Nullelement und* $|*| : P \to A$ *eine Abbildung von* P *nach* A, *so daß die folgenden Axiome gelten:*

(1) *Ist* $a \leqslant b$ *in* P, *so ist* $|a| \leqslant |b|$.
(2) *Ist* $a \leqslant b$ *in* P, $|a| = |b|$, *so ist* $a = b$.
(3) *Ist* $z \in N$, $a \neq 0$ *in* P, $a \leqslant z$, *so ist* $a = z$.
(4a) *Ist* $a \in P$, $a \neq 0$, *so gibt es ein* $z \leqslant a$, $z \in N$.
(4b) *Ist* $z \in N$, *so gibt es ein* $a \in P' = P - N(P) - \{0\}$ *mit* $z < a$.
(5a) *Ist* $a \leqslant b_1, b_2$, $|b_1| = |b_2|$, *so ist* $b_1 = b_2$.
(5b) *Ist* $a \in P' = P - N(P) - \{0\}$, $X \geqslant |a|$, $X \in A$, *so gibt es ein* (*und wegen* (5a) *nur ein*) $b \in P'$, *mit* $a \leqslant b$, $|b| = X$.

Unter diesen Umständen sprechen wir von einer Tangentialstruktur P mit Normbereich A und Atombereich $N = N(P)$.

Wir rechnen die Null nicht mit zu den Atomen dazu. Es besteht unsere Tangentialstruktur P also aus drei verschiedenen Elementeklassen : $P' = P - N(P) - \{0\}$, den eigentlichen Elementen, N(P), den Atomen und aus dem Nullelement 0. Das Axiom (5*b*) zeichnet die Elemente von P′ vor allen anderen aus. Es ermöglicht uns eine Art Inklusionsabbildung

$$i_X^Y : \{a \| a| = Y\} \to \{b \| b| = X\}$$

für $Y \leqslant X$ in A zu definieren. Zu jedem $a \in P'$, $|a| = Y$ gibt es wegen (5*b*) ein und wegen (5*a*) nur ein $b \in P'$ mit $|b| = X$, also setzen wir $i_X^Y a = b$ für die Atome oder gar für die Null gibt es so etwas nicht mehr.

Wir sind hier nicht so sehr an einer rein algebraischen, verbandstheoretischen Theorie der Tangentialstrukturen interessiert, sondern wir haben konkrete geometrische Beispiele vor Augen. Unsere Axiome sind im Hinblick auf die Beispiele aufgestellt worden. Sie sind widerspruchsfrei, wie aus kommenden Beispielen zu ersehen ist, aber nicht unabhängig : z.B. folgt (2) aus (5*a*).

Wir wollen gleich hier ein Wort zum Unterschied zwischen einer allgemeinen Tangentialstruktur P und einer Homologiestruktur sagen : Es ist $|X|^{-1} = \{a | a \in P', \ |a| = X\}$ keine Gruppe mehr.

Jetzt kommen wir zu den wichtigsten Beispielen :

1. P_r. — Wir betrachten alle Polyeder *a*, die geradlinig in den R^n eingebettet sind und die eine Dimension $\geqslant r$ haben, und alle Teilmengen des R^n, die solche Polyeder enthalten. Das ist unser Bereich P'_r. Es ist $a_1 \leqslant a_2$ in P_r, wenn mengentheoretisch $a_1 \subseteq a_2$ ist. Der Normbereich A ist der Verband aller Teilmengen des R^n, den wir, ebenso wie P'_r mit einem zusätzlichen Nullelement versehen.

Die Normbildung in P'_r ist insofern trivial, als wir dem Element $a \in P'_r$ an die Seite stellen die Punktmenge $|a| \subseteq R^n$. Zu $X \subset R^n$ gibt es also höchstens ein $a \in P'_r$ mit $|a| = X$. Jetzt kommen wir zu den Atomen :

Sei $x \in R^n$ ein Punkt und I ein Ideal ([2]) in P'_r mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist $x = \bigcap_{a \in I} |a|$.

(2a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $a \in P'_r$ ist $U(x, \varepsilon) \cap |a| \in |P'_r|$.

(2b) Es sollen alle hinreichend kleinen $a \in I$ in einem Simplex σ^r liegen.

(3) Es ist I maximal mit Eigenschaft (1), (2).

Ein solches Ideal I nennen wir ein Atom $z \in N(P_r)$. Es ist $|z| = x$ und es wird $z < a \in P'_r$ gesetzt, wenn a in dem entsprechenden Ideal I liegt, welches wir im Folgenden immer mit (z) bezeichnen werden.

Auf $N(P_r)$ ist die Normbildung nicht mehr trivial: Sind $a_1, a_2 \in P'_r$ so beschaffen, daß $\dim a_1 \cap a_2 < r$, daß es aber in $a_1 \cap a_2$ einen Punkt x gibt, der Atomträger sowohl in a_1 als auch in a_2 ist, so gibt es zwei Atome $z_1 \neq z_2$ mit $z_i < a_i$ und $|z_1| = |z_2| = x$.

Der Nachweis der Axiome von Definition 0.1 ist hier trivial.

Wir wollen auch allgemein mit (z) die Menge $\{a | a > z, a \in P'\}$ bezeichnen, selbst wenn (z) kein Ideal ist. Ist (z) ein Ideal und erfüllt es (1), (3) in einer sinngemäßen Abwandlung, so werden wir im ersten Abschnitt von einer normalisierten Tangentialstruktur sprechen (Definition 1.2).

2. D_r. — Hier ist D'_r die Gesamtheit aller Teilmengen X des R^n mit $\dim X \geqslant r$. Wir können irgend einen der üblichen Dimensionsbegriffe zugrunde legen, da diese nach [3] alle isomorph sind. Sonst verlaufen unsere Konstruktionen wie im ersten Fall, aber ohne (2b). Wir haben sonst einfach P'_r durch D'_r zu ersetzen.

Wir bemerken:

Ist $z \in N(D_r)$ ein Atom, $z \in N(P_r)$, dann gibt es kein Atom $z_1 \in N(P_r)$ mit $(z_1) \subseteq (z)$. Der Beweis ist eine einfache Folgerung aus der Tatsache, daß jede r-dimensionale Teilmenge X eines r-dimensionalen Würfels I^r eine offene Menge enthält.

Daraus folgt auch:

Es ist $P_r \subset D_r$.

([2]) Bezüglich des Idealbegriffes s. Abschnitt 1, Definition 1. 1.

Zunächst ist $P_r \subset D_r$. Wegen obiger Betrachtung ist aber auch $N(P_r) \subset N(D_r)$.

3. M_r. — Die Elemente von M_r' sind alle Teilmengen des R^r, die eine r-dimensionale, stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit mit stückweise differenzierbarem Rand enthalten. In (2*b*) wird « Simplex σ^r » durch « differenzierbare Mannigfaltigkeit V^r » ersetzt. Sonst verlaufen unsere Konstruktionen ebenso wie im Falle von P_r. Auch hier ist $P_r \subset M_r$.

Man kann den folgenden Epimorphismus $\varphi : N(M_r) \to N(P_r)$ konstruieren. Sei V^r eine differenzierbare Mannifgaltigkeit der Dimension r und $x \in V^r$. Zu x gibt es eine Tangentialebene E^r an V^r. Wir können in E^r einen Würfel I^r mit Zentrum x finden und von V^r voraussetzen, daß es eine topologische Parallelprojektion p von V^r auf I^r gibt. Dadurch wird eine Abbildung von allen hinreichend kleinen Elementen von (z) für ein $z \in N(M_r)$ mit $|z| = x$ auf ein $z_1 \in N(P_r)$, $|z_1| = x$ vermittelt. Wir setzen $\varphi(z) = z_1$. Diese Abbildung ist natürlich nicht eineindeutig, denn es kann noch andere Mannigfaltigkeiten W mit Tangentialebene E^r im Punkte x geben. Diese Abbildung wird noch eine wichtige Rolle spielen. Ist I^r wie eben gegeben und bilden wir für ein z_1 mit $|z_1| = x$

$$\bigcap_{\varphi(z) = z_1} (z) = I,$$

so ist das ein Teilideal in (z_1) aber es bestimmt z_1, denn aus $z_2 \in N(P_r)$, $(z_2) \supset I$ folgt $z_2 = z_1$.

4. **Homologiestrukturen** (s. [1], [2]). — Sei A eine V-Kategorie und $\mathfrak{v}$ eine lokal atomare Homologiestruktur über A_p, dem Bereich aller Paare (X, Y), $(X \geqslant Y)$ in A. Die Elemente von $\mathfrak{v}$ sind die $\zeta^\varphi \in H_q(\varphi)$ für ein Paar $\varphi = (X, Y) \in A_p$ und feste Dimension q. Es ist $\zeta^{\varphi_1} \leqslant \zeta^{\varphi_2}$, wenn $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ und $i_{*\varphi_2}^{\varphi_1} \zeta^{\varphi_1} = \zeta^{\varphi_2}$ ist. Hierbei ist i_* der durch $i : \varphi_1 \subseteq \varphi_2$ induzierte Inklusionshomomorphismus. Die Atome von $\mathfrak{v}$ sind gerade die Atome im Sinne von Definition 0.1. Ist $\mathfrak{v}$ sogar atomar (z.B. die simpliziale Theorie), so heißt das, daß Axiom (5*b*) sogar für alle $a \in \mathfrak{v}$ nicht nur für alle $a \in \mathfrak{v}'$ gilt.

Damit haben wir die Homologiestrukturen als Spezialfall der Tangentialstrukturen erkannt.

Von besonderer Bedeutung sind für uns alle diejenigen Fragestellungen, in denen wir keine Homologiestrukturen mehr vor uns haben, die sich also nicht mehr den mit in [1] und [2] angegebenen Mitteln lösen lassen. In dieser Arbeit wird für Tangentialstrukturen eine Dualitäts- und eine Fortsetzungstheorie angegeben. In ersterer wird zu jedem P ein duales $\tilde{\mathrm{P}}$ so konstruiert, daß

$$\tilde{\tilde{\mathrm{P}}} = \mathrm{P} \tag{1}$$

ist.

In der Fortsetzungstheorie geben wir zu jedem P zwei Fortsetzungstypen P^i, die injektive und P^p, die projektive Fortsetzung an, so daß:

$$\mathrm{P}^i_r = \mathrm{D}_r \tag{2}$$

$$\mathrm{P}^p_r = \mathrm{M}_r \tag{3}$$

ist. Das entscheidende Stück dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Verbindung von Dualitäts- und Fortsetzungstheorie, die sich folgendermaßen in Formeln ausdrücken läßt:

$$(\tilde{\mathrm{P}})^p = \widetilde{\mathrm{P}^i} \tag{4}$$

$$(\tilde{\mathrm{P}})^i = \widetilde{\mathrm{P}^p}. \tag{5}$$

Durch Anwendung von (1) kommt man zu:

$$\widetilde{(\tilde{\mathrm{P}})^p} = \mathrm{P}^i \tag{6}$$

$$\widetilde{(\tilde{\mathrm{P}})^i} = \mathrm{P}^p. \tag{7}$$

Dadurch wird ein Zusammenhang zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und der Dimensionstheorie hergestellt, der seinen intuitiven Ausdruck in den folgenden Definitionen findet:

α) Ein Raum $\mathrm{X} \subset \mathrm{R}^n$ heißt $\geqslant r$-dimensional, wenn es eine epimorphe Abbildung $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{I}^r$ ($= r$-dim. Würfel) gibt, die in mindestens einem Punkte wesentlich ist.

Eine Abbildung heißt nach [3] wesentlich an der Stelle $x \in \mathrm{I}^r$, wenn es kein $g\colon \mathrm{X} \to \mathrm{I}^r$, $\delta(f, g) < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gibt mit $g(\mathrm{X}) \subset \mathrm{I}^r - x$.

β) Ein topologischer Raum V^r ist eine r-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit im R^n, wenn es zu jedem $x \in \mathrm{V}^r$ eine monomorphe Abbildung $f\colon \mathrm{I}^r \to \mathrm{V}^r$ gibt, so daß f I^r

eine Umgebung von x ist und wenn es zu jedem x eine eindeutig bestimmte Tangentialebene E^r gibt, die stetig mit x variiert.

Es ist seit längerer Zeit aus der homologischen Algebra bekannt, daß sich Epimorphismen und Monomorphismen in dualer Weise entsprechen. Hier ist einmal noch davon die Rede, daß die Abbildung in (α) wesentlich und in (β), daß sie sogar differenzierbar ist. Wir werden im folgenden auch diese beiden Punkte in Beziehung zu setzen versuchen.

Es empfiehlt sich, im folgenden A als vollständig vorauszusetzen.

Zunächst gehen wir auf die Erklärung der Dualität ein: Eine Wurzel w in einer Tangentialstruktur P ist eine Teilmenge von P'. welche den folgenden beiden Forderungen genügt:

(1) Es ist $w = \cap(z)$ für eine gewisse Menge von Atomen.

(2) Es ist kein $a \in P'$, $a < b$ für alle $b \in w$ vorhanden.

Wir setzen $|w|_A = \bigvee |z|$, im Gegensatz zu $|w| = \{|a| \mid a \in w\}$. Zu den Wurzeln gehören die Atome und die sogenannten offenen Atome. Eine Wurzel w_X heißt offen, wenn $w_X = \bigcap_{|w|=X} w$ ist. Eine offene Wurzel ist ein offenes Atom, wenn

$$|w_X|_A = X \in |N(P)|$$

ist. Nicht zu den Wurzeln gehören i.A. maximale Ideale m in P', denn es ist $|m|_A = \emptyset \in A$.

Wir können in P den Atombereich abändern und z.B. N(P) als die Menge aller der Wurzeln W setzen, die rel. zu ihrem Träger $|w|_A$ maximal sind. Der neue Wurzelbereich ist gleich dem alten. Es kann jetzt allerdings passieren, daß für zwei neue Atome w_1, w_2 gilt $|w_1|_A \subseteq |w_2|_A$ oder daß sogar $w_1 \supseteq w_2$ ist. Solche Inklusionen lassen wir aber nicht als Inklusionen in P gelten. Den Bereich der offenen Wurzeln nennen wir OW(P). Die Dualitätskonstruktion besteht nun darin, daß man P' und OW(P) miteinander vertauscht. In OW(P) nehmen wir als Elementebereich von $\tilde{P}'$ die durch die Wurzeln implizierte Anordnung.

Im zweiten Abschnitt wird diese Dualität ausführlich beschrieben werden. Zu ihr gehört noch ein Verfahren, P zu normalisieren, welches wir N_A nennen und ein anderes N_A^{-1}, diese Normalisierung wieder aufzuheben und P in eine offene Struktur zu verwandeln. Dabei verstehen wir unter einer

offenen eine solche, bei der es (Def. 1.5) zu jedem $x \in |N(P)|$ nur ein Atom z mit $|z| = x$ gibt. Wenn wir die oben beschriebene Vertauschung von P' und $OW(P)$ D nennen, so sieht die Dualitätskonstruktion so aus:

$$\tilde{P} = N_A D N_A^{-1} P. \tag{8}$$

Die Elemente von P sind die offenen Wurzeln OW(P). Den Wurzeln W(P) entsprechen die sogenannten Kowurzeln K(P). Das sind Ideale im Bereich OW(P) mit Anordnung: $w_1 \leqslant w_2$, wenn $w_1 \subseteq w_2$. Für die Träger gilt dann $|w_1|_A \geqslant |w_2|_A$. Der Träger einer Kowurzel ist ein $X \in |P'|$. Wir machen uns noch klar, daß es zu einem festen $X \in |P'_r|$ mehrere Kowurzeln K geben kann mit $|K|_A = X$: Wir nehmen zwei Wurzeln w_1, w_2 $|w_1|_A < X$, $|w_1|_A \cup |w_2|_A = X$. Es können diese beiden Wurzeln nicht in der gleichen Kowurzel k liegen, da $w_1 \cap w_2$ keine Kowurzel mehr ist.

Jetzt gehen wir zur Beschreibung der Fortsetzungstheorie über:

Die Bedingung (α) ersetzen wir durch die folgende:

α') Es gibt einen Epimorphismus

$$f: W(X) \to W(I^r)$$

und zu jedem $z_0^1 \in OW(I^r)$ ein offenes Atom $z_0 \in OW(X)$ sowie einen Monomorphismus $\varphi: \hat{z}_0^1 \to \hat{}_0 (\hat{z}_0 = \{w | w \in OW(X), w \subseteq z_0\}$, entsprechend für z_0^1), so daß $z_0 \in \varphi \hat{z}_0^1$ und $f\varphi =$ Identität ist.

Aus der obigen Abbildung f in (α) ist der Epimorphismus f geworden. Man kann zeigen, daß offene Wurzeln in offene Wurzeln übergehen und daß umgekehrt das vollständige Urbild $f^{-1} w_0$ einer offenen Wurzel $w_0 \in OW(I^r)$ eine offene Wurzel ist. Ersteres beweist, daß f wesentlich, letzteres, daß es stetig ist.

Die Bedingung (β) wird durch eine nunmehr vollkommen duale Bedingung ersetzt:

β') Ist $w_0 \in OW(M_r)$, $w_1 \in OW(P_r)$, so gibt es einen Epimorphismus

$$f: K(w_0) \to K(w_1)$$

und zu jedem $a \in w_0$ ein $a' \geqslant a$ sowie einen Monomorphismus

$$\varphi: \hat{b} \to \hat{a}' \quad (\hat{b} = \{c | c \leqslant b\}, \text{ entspr. für } a')$$

so daß $f\varphi =$ Identität und $a' \in \varphi \hat{b}$ ist. Hierbei wird unter $K(w_0)$

der Bereich aller der Kowurzeln k mit $w \in k$ verstanden (entsprechend $\mathrm{K}(w_1)$.)

Die Wurzeln in (α) werden in (β) zu Kowurzeln. Aus dem Element $\mathrm{X} \in \mathrm{D}_r'$ in (α) wird in (β) eine Wurzel w_0 ganz so, wie es der Dualität entspricht.

Im Ganzen gesehen ist (α) einfach eine duale Umformung von (β).

Durch die Monomorphismen in (β) wird eine Abbildung von I^r in die Mannigfaltigkeit V^r vermittelt. Die Tangentialebene von V^r im Punkte $|w_0|_\mathrm{A}$ ist I^r. Auf diese Weise kann man nachweisen, daß $\mathrm{P}_r^p = \mathrm{M}_r$ ist.

Zu der hier dargelegten Theorie gibt es eine Menge von Anwendungen, die in einer besonderen Arbeit besprochen werden sollen. So z.B. die Anwendungen auf die Dimensionstheorie und auf die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Am Schluß dieser Einleitung geben wir noch eine kurze Übersicht über die Gliederung der nachfolgenden Abschnitte an:

Im ersten Abschnitt werden noch einige allgemeine Fakten über Tangentialstrukturen bewiesen. Der zweite Abschnitt ist der Dualitätstheorie gewidmet. Im dritten Abschnitt werden die projektive und die injektive Fortsetzung definiert und zwei Sätze bewiesen, die die Existenz diezer Fortsetzungen sicherstellen. Im vierten Abschnitt werden die Formeln (4) (5) bewiesen. Der fünfte und sechste Abschnitt gehört den Anwendungen. In ersterem finden wir den Beweis von (2), im letzteren den von (3).

Ich verdanke P. S. Alexandroff und meinem Lehrer W. Franz für das Zustandekommen dieser Arbeit mehr, als ich hier ausdrücken kann.

1. Tangentialstrukturen. — Während wir in der Einleitung die Tangentialstrukturen definiert haben, wollen wir hier etwas mehr auf ihre algebraische Theorie eingehen. Unter anderem soll eine Topologie in der Menge $|\mathrm{N}|$ der Atomträger definiert werden. Zu Beginn stellen wir einige Bezeichnungen zusammen, die wir teilweise schon in der Einleitung benutzt haben:

$$\bar{a} = \{z | z \leqslant a\}, \qquad |\bar{a}| = \{|z| \, | z \in \bar{a}|\}, \qquad \hat{a} = \{b | b \leqslant a, \ b \in \mathrm{P}\},$$

letzteres ist für $a \in P'$ eine Tangentialstruktur, die in P enthalten ist.

Von ganz besonderer Bedeutung ist für unsere Untersuchungen der Begriff des Ideals. Da P kein Verband ist, können wir den idealtheoretischen Verbandsbegriff nicht wörtlich übertragen, sondern müssen wir wie folgt definieren:

Definition 1.1. — *Ein Ideal in* P *ist eine Teilmenge* $I \subset P'$, *so daß gilt:*

(I 1) *mit* $a \in I$, $b \in P'$, $b \geqslant a$ *ist* $b \in I$,

(I 2) *zu* $a_1, a_2 \in I$ *existiert ein* $a \leqslant a_1, a_2$ $a \in I$, $|a| = |a_1| \wedge |a_2|$,

(I 3) *ist* $a_1, a_2 \in I$, $|a_1| = |a_2|$, *so ist* $a_1 = a_2$.

Diese Bedingungen sind nicht voneinander unabhängig, es folgt (I 3) *aus den übrigen: Ist* $|a_1| = |a_2|$, *so gibt es wegen* (I 2) *ein* $a \in I$ *mit* $a \leqslant a_1, a_2$, $|a| = |a_1| = |a_2|$.

Wegen (2) Definition 0.1 heißt es aber $a_1 = a_2$.

Für ein Ideal haben wir zwei Möglichkeiten, die Norm zu bilden: Es ist

$$|I| = \{|a| \, | a \in I\} \quad \text{ein Ideal in A,}$$

wohingegen

$$|I|_A = \bigcap_{a \in I} |a| \quad \text{ein Element in A ist.}$$

Bei der Definition der Atome herrscht insofern eine gewisse Willkür, als man bei festem P′ auf viele Arten in P Atome einführen kann. Wir schränken diese Willkür durch die folgenden Definition etwas ein:

Definition 1.2. — *Eine Tangentialstruktur* P *heißt normalisiert, wenn für jedes Atom* $z \in N(P)$ *die Menge* $(z) = \{a | a > z\}$ *ein Ideal ist, so daß gilt: Ist* $\langle x \rangle = \{a | a > z, |z| = x\} = \cup (z)$, *so ist* $\{(z) | |z| = x\}$ *gerade die Menge aller in* $\langle x \rangle$ *maximalen Ideale.*

Diese normalisierten Strukturen werden für uns von besonderem Interesse sein. Wir werden, mit Ausnahme des nächsten Abschnittes, P immer als normalisiert voraussetzen.

Die Tangentialstrukturen bilden natürlich auch eine Kategorie bei der Definition gewisser Abbildungen:

Definition 1.3. — *Sind* P, Q *zwei Tangentialstrukturen und*

$$f: \quad P \to Q$$
$$|f|: \ |P| \to |Q|$$

zwei Abbildungen, von denen die erste anordnungserhaltend und die zweite ein Verbandshomomorphismus ist, so daß

$$|f||a| = |fa|$$

für alle $a \in P$ *ist, so nennen wir* f *einen Homomorphismus von* P *in* Q. *Ist* f *so beschaffen, daß* $f\mathrm{N(P)} \subset \mathrm{N(Q)}$, *so nennen wir* f *atomar.*

Man prüft leicht nach, daß die Menge $\mathfrak{p}$ aller Tangentialstrukturen unter diesen Abbildungen eine Kategorie bildet.

Wir werden etwas weiter unten noch die offenen Tangentialstrukturen definieren. Dieser Begriff der Offenheit, der die ganze Arbeit durchzieht, gibt aber sogar Anlaß zu einer Topologie:

Definition 1.4. — *Ist* P *eine Tangentialstruktur und* $|\mathrm{N}|$ *die Menge der Atomträger, so führen wir in* $|\mathrm{N}|$ *eine Topologie durch folgende Erklärung der offenen Menge ein:*

Eine Menge $0 \subset |\mathrm{N}|$ *heißt offen, wenn es zu jedem Atom* z, $|z| \in 0$ *ein* $a \in \mathrm{P}'$ *mit* $z < a$, $|\bar{a}| \subset 0$ *gibt. Ausserdem soll die leere Menge offen sein.*

Wir können beweisen:

Satz 1.1. — *Durch Definition 1.4 wird in* $|\mathrm{N}|$ *eine Topologie* t_p *eingeführt, Ist* $|\mathrm{N}|$ *in der Menge der Atome von* A *enthalten und ist für jedes Atom* z: $|z| = |(z)|_{\mathrm{A}}$ *so ist jeder Punkt von* $|\mathrm{N}|$ *abgeschlossen.*

Beweis. — Wir zeigen für t_p:

(α) Sind O_1, O_2 offen in t_p, so ist $\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ offen in t_p.

(β) Ist $\mathrm{K} = \cup\, \mathrm{O}$ Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen, so ist K offen.

(γ) Ist $|\mathrm{N(P)}| \subset \mathrm{N(A)}$ (= Menge der Atome von A), und ist für jedes Atom z: $|z| = |(z)|_{\mathrm{A}}$, so ist jedes $x \in |\mathrm{N(P)}|$ abgeschlossen.

Zu (α): Ist $\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ leer, so ist wegen Definition 1.4 nichts mehr zu beweisen. Sei also $x \in \mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ und $z \in \mathrm{N(P)}$, $|z| = x$. Es gibt ein Paar $a_i \in \mathrm{P}'$, $z < a_i$ mit $|a_i| < \mathrm{O}_i$. Da (z) ein Ideal ist, gibt es ein $a \subseteq a_1, a_2$ $a \in \mathrm{P}'$, $z \subset a$. Da $|\bar{a}| \subset |\bar{a}_1| \cap |\bar{a}_2|$ ist, ist auch $\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2$ offen.

Zu (β): Ist $x \in \mathrm{K}$, $|z| = x$, so gibt es in jedem 0 ein $a \in \mathrm{P}'$ $|\bar{a}| \subset 0$, $z \subset a$. Also ist K offen, da $\mathrm{O} \subset \mathrm{K}$.

Z_u (γ): Sind $x_1 \neq x_2$ in $|N(P)|$, so ist nach Voraussetzung $x_1 \cap x_2 = \emptyset$. Es gibt zu $z \in N$, $|z| = x_1$ ein $a \in P'$, $a > z$, $|\bar{a}| \subset |N| - x_2$. Anderenfalls wäre $x_2 \in \bigcap_{a \in (z)} |a|$, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Damit ist Satz 1.1 bewiesen.

Wir haben im Beweis von Satz 1.1 die Normalisiertheit von P benutzt. Sie stellte ein wichtiges Hilfsmittel dar.

Von besonderer Bedeutung sind für uns noch die offenen Tangentialstrukturen:

Definition 1.5. — *Eine Tangentialstruktur (nicht notwendig normalisiert) ist offen, wenn es zu jedem $x \in |N|$ genau ein $z \in N$ mit $|z| = x$ gibt.*

Nehmen wir z.B. die Gesamtheit aller offenen Teilmengen des R^n, als H_n' und die maximalen Ideale mit Punktträger als Atome, so ist H_n offen und normalisiert. Führen wir in einem beliebigen (normalisierten) P neue Atome dadurch ein, daß $(z) = \langle x \rangle$ für ein $x \in |N|$ ist, d.h., daß es in dem neuen P zu einem x nur ein z mit $|z| = x$ gibt, dann ist dieses P offen, aber nicht normalisiert. In einer offenen Struktur ist diese Topologie aus Satz 1.1 besonders einfach.

Wir setzen noch die folgende Sprechweise fest: Wir sagen: « $z \in N$ erzeugt in einem offenen $O \in |N|$ », wenn wir meinen: « es gibt ein $a \in P'$, $|\bar{a}| \subset O$, $z < a$ ». Wir sagen: « es ist a offen rel. $b (a \leqslant b,\ a,\ b \in P')$ », wenn wir meinen: « es ist $|\bar{a}|$ offen rel. $|\bar{b}|$ ».

Jetzt untersuchen wir die eben beschriebene Topologie $\mathfrak{t}$ im Falle unserer Beispiele:

Leider ist es so, daß wir nicht mehr in der Lage sind, nachzuweisen, daß $\mathfrak{t}_{P_r}$, $\mathfrak{t}_{M_r}$ oder $\mathfrak{t}_{D_r}$ gleich der euklidischen Topologie sind. Man kann sich selbst leicht Beispiele dafür konstruieren. Trotzdem stehen diese Topologien zur euklidischen Topologie in einem einfachen Zusammenhang. Wir haben in der euklidischen Topologie $\mathfrak{x}$ eine solche vor uns, die dem folgenden Trennungsaxiom genügt:

(T) Sind $x_1, x_2 \in R^n$, $x_1 \neq x_2$, so gibt es immer zwei Umgebungen $U_i(x_i)$, sodaß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist.

In der Sprache der Atome von z.B. P_r lautet dieses Axiom:

(1.1) Sind x_1, $x_2 \in |N(P_r)|$, $x_1 \neq x_2$, so gibt es immer zwei

Umgebungen $U_i(x_i)$ in der Topologie $\mathfrak{t}_{P_r}$, sodaß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist.

Beweis. — Alles was wir einsehen müssen, ist, daß $\mathfrak{t}_{P_r}$ feiner als $\mathfrak{x}$ ist. Das aber ist richtig, denn jedes $z \in N(P_r)$ erzeugt in einer rel. $\mathfrak{x}$ offenen Menge.

Wir können offenbar (1.1) ebenso für D_r und M_r formulieren.

Wenn schon $\mathfrak{t}_{P_r}$ nicht mit $\mathfrak{x}$ übereinstimmt, so ist doch $\mathfrak{x}$ die gröbste Topologie, die (T) erfüllt und gröber als $\mathfrak{t}_{P_r}$ ist. Das wollen wir jetzt beweisen:

(1.2) Es ist die euklidische Topologie $\mathfrak{x}$ die kleinste Topologie $\mathfrak{p}_{P_r} = \mathfrak{p}$ (d.h. die gröbste), die für P_r den folgenden. Axiomen genügt:

(α) Ist O in $\mathfrak{p}_{P_r}$ offen, so erzeugt jedes Atom $z \in N(P_r)$, $|z| \in O$ in O.

(β) Sind $x_1 \neq x_2 \in |N|$, so gibt es offene Umgebungen rel. $\mathfrak{p}_{P_r}$ $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Beweis. — Es ist $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{t}_{P_r}$ (d.h. $\mathfrak{p}$ gröber als $\mathfrak{t}_{P_r}$) und $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{x}$ denn $\mathfrak{x}$ erfüllt (α), (β). Sei $O_\mathfrak{x}$ offen rel. $\mathfrak{x}$, $x \in O_\mathfrak{x}$, und $F_x = \{O_\mathfrak{x} | x \in O_\mathfrak{p},\ O_\mathfrak{p} \text{ offen rel. } \mathfrak{p}\}$. Entweder es ist ein $Q \in F_x$ vorhanden, sodaß $O_\mathfrak{p} \subseteq O_\mathfrak{x}$ für alle $O_\mathfrak{p} \in F_x$, $O_\mathfrak{p} \subseteq Q$. Gilt das für jedes $x \in O_\mathfrak{x}$, so ist $O_\mathfrak{x}$ offen in $\mathfrak{p}$. Im entgegengesetzten Falle ist ein $y \in R^n - O_\mathfrak{x}$ vorhanden, $y \in \bigcap_{O_\mathfrak{p} \in F_r} (\overline{O_\mathfrak{p} - O_\mathfrak{x}})$. Das besagt aber, daß x und y nicht im Sinne von (β) getrennt werden können was auf $x = y$ führt, was aber unmöglich ist.

Man kann ebenso wie in (1.2) zeigen:

(1.3) Es ist $\mathfrak{p}_{D_r} = \mathfrak{x}$.

(1.4) Es ist $\mathfrak{p}_{M_r} = \mathfrak{x}$.

Die Tangentialstrukturen aus Definition 0.1 sind uns noch etwas zu allgemein. Wir schränken sie durch folgende Definition ein:

Definition 1.6. — *Eine Tangentialstruktur* P *heißt einfach, wenn die Angabe von* $|(z)|$, $z \in N(P)$ *und einem* $a \in P'$, $|a| \in |(z)|$ *bereits z eindeutig bestimmt.*

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, nehmen wir alle Strukturen P (ausser im 2. Abschnitt) als einfach an.

(1.5) Ist in P ein maximales Element E vorhanden mit der

Eigenschaft $E \geqslant a$ für alle $a \in P$ und ist P einfach, so gibt es zu einem $X \in |P'|$ nur ein $a \in P'$ mit $X = |a|$.

Beweis. — Ist $z \in N$, dann liegt E in (z), also ist z durch $|(z)|$ eindeutig bestimmt. Sei $a_1, a_2 \in P'$, $|a_1| = |a_2|$. Es gibt ein $z < a_1$. Durch das Paar (z, a_1) wird (z) und damit $|(z)|$ bestimmt. Da nun auch $|a_2| \in |(z)|$ ist, gibt es ein $z_1 \in N$, $|(z_1)| = |(z)|$, $z_1 < a_2$. Durch $|(z)|$ wird aber z bestimmt, also ist $z_1 = z$ und $a_1 = a_2$.

Die Strukturen P_r, D_r, M_r sind einfach. Im Folgenden wollen wir auch immer annehmen, daß ein maximales Element in P vorhanden ist, so daß (1.5) anwendbar ist. Wir wollen im Folgenden unter einer einfachen Struktur eine solche verstehen, bei der es zu jedem $|a| \in |P'|$ nur ein $a \in P'$ mit diesem Träger gibt. Homologiestrukturen sind i.A. nicht einfach: Sei $\mathfrak{v}$ eine atomare Homologiestruktur über dem ganzzahligen Bereich Z und $\lambda \in Z$, $\lambda \neq 1$. Ist $z \in N\ (\mathfrak{v})$, so ist i.A. d.h. für $z \neq 0$:

$$\lambda z \neq z,$$

aber

$$|(\lambda z)| = |(z)|.$$

Ist $O_X \in H(X)$ ein Element einer Homologiegruppe von X und ist $z < O_X$, $z > 0$ in X, so ist auch $\lambda z \leqslant O_X$. Selbst wenn in $\mathfrak{v}$ kein maximales Element vorhanden ist, ist also $\mathfrak{v}$ nicht einfach, da O_X und $|(z)|$ nicht z eindeutig bestimmen.

Man kann jede Struktur P in einfache Strukturen zerlegen: Ist $z \in N$, so ist (z) eine einfache Teilstruktur und es ist

$$P = \bigcup_{z \in N} (z).$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß P', $|N(P)|$ und die Tatsache, daß P normalisiert ist, noch nicht N(P) bestimmen. Bereits in der Einleitung haben wir gesehen, daß man auch den Bereich aller rel. $|w|_A$ maximalen Wurzeln als Atome nehmen kann. War P normalisiert, so ist es auch nach dieser Abänderung normalisiert.

2. Dualität in Tangentialstrukturen. — In diesem Abschnitt wird zu jeder Tangentialstruktur P eine duale $\tilde{P}$ derart konstruiert, daß Satz 2.2 gilt. Die Konstruktion ist einfach,

stellt aber doch einen wichtigen Schritt in unseren Untersuchungen dar:

Wir lassen in diesem Abschnitt neben normalisierten auch beliebige, nicht normalisierte Strukturen zu, um besser operieren zu können. Am Anfang führen wir eine Reihe von Operatoren N_A, N_A^{-1}, D an, die, jede für sich einen elementaren Schritt zwischen P und $\tilde{P}$ darstellen und die alle zusammen den Dualitätsoperator liefern. Durch den Operator N_A wird eine nicht normalisierte Struktur unter Festhaltung von P' und $W(P)$ in eine normalisierte Struktur übergeführt. Der Operator N_A^{-1} macht aus P eine offene Struktur und fällt mit der Konstruktion zusammen, die wir schon anlässlich der Einführung der offenen Strukturen in Definition 1.5 angedeutet haben.

Der Operator D schließlich ist der Dualitätsoperator für offene Strukturen, wo er eine besonders einfache Form annimmt; er ist nämlich nichts anderes als die Vertauschung von P' und $W(P)$ (welches jetzt gleich $OW(P)$ ist). Der Dualitätsoperator ist dann einfach $N_A D N_A^{-1}$. Er führt normalisierte in normalisierte Strukturen über, und wir können auf diesem Standpunkt wieder dazu übergehen, grundsätzlich nur normalisierte Strukturen zu betrachten.

N_A. — Sei P eine offene Tangentialstruktur, so teilen wir die Atome $\mathfrak{z} \in N(P)$ in Klassen von Idealen (z) auf, so daß es zu einem (z) kein Ideal I gibt, welches größer als (z) und in $(\mathfrak{z})$ enthalten ist.

Die Struktur $N_A P$ hat diese Ideale zu Atomen. Es ist $(N_A P)' = P'$ und $|W(P)|_A = |W(N_A P)|_A$.

(2.1) Es ist $N_A P$ eine normalisierte, einfache Tangentialstruktur. Dadurch, daß wir jedem Ideal (z) wieder das $\mathfrak{z}$ mit $(\mathfrak{z}) \supset (z)$ zuordnen und $(N_A P)'$ fest lassen, finden wir einen Epimorphismus

$$f : N_A P \to P$$

der atomar und auf $(N_A P)'$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. — Wir haben die Axiome aus Definition 0.1 nachzuweisen. Es zerfällt ganz $(\mathfrak{z})$ in die Vereinigung von im Sinne der Definition von N_A maximalen Idealen (z), also hat man tatsächlich genügend Atome $N_A P$. Der Nachweis der Axiome

ist jetzt vollständig trivial. Die Menge (z) ist ein Ideal. Wegen der Definition von N_A ist auch Definition 1.2 erfüllt, also ist $N_A P$ normalisiert. War P einfach, so ist auch $N_A P$ einfach, da es immer noch zu jedem $X \in |P|'$ nur ein $a \in P'$ mit $X = |a|$ gibt. Trivialerweise ist f ein atomarer Epimorphismus.

N_A^{-1}. — Sei P eine normalisierte Tangentialstruktur. Wir bilden Äquivalenzklassen in N(P) und nennen $z_1 \sim z_2$, wenn $|z_1| = |z_2|$ ist. Die Atome von N_A^{-1} P sind diese Äquivalenzklassen. Es ist jetzt für $\mathfrak{z} \in N(N_A^{-1}P)$ $(\mathfrak{z}) = \{a | a > z, |z| = |\mathfrak{z}|\}$.
Wieder wird $P' = (N_A^{-1}P')$ gesetzt.

(2.2) Es ist $N_A^{-1}P$ eine offene, einfache Tangentialstruktur. Dadurch, daß wir jedem $z \in P(N)$ seine Äquivalenzklassen zuordnen und P′ fest lassen, erhalten wir einen Epimorphismus

$$f: P \rightarrow N_A^{-1}P.$$

Beweis. — Wieder sind die Axiome in Definition 0.1 trivial, da sie für P gelten. Wegen unserer Konstruktion ist $N_A^{-1}P$ offen (Definition 1.5). Der Beweis der Einfachheit verläuft wie bei N_A.

(2.3) Ist P normalisiert, so ist:

$$N_A N_A^{-1} P = P. \tag{1}$$

Ist P offen, so ist:

$$N_A^{-1} N_A P = P. \tag{2}$$

Beweis. — Ist P normalisiert, so kann man N_A^{-1} anwenden. Dieser Operator faßt nach Definition die Atome mit festem Träger zusammen. Der Operator N_A zerlegt die Mengen $(\mathfrak{z})$ wieder in (rel. $(\mathfrak{z})$) maximale Ideale. Wegen der Definition 1.2 waren diese Ideale (z), $z \in N(P)$ bereits maximal in der Menge aller a, $a > z_1$ für alle z_1 mit $|z_1| = |z|$, also in $(\mathfrak{z})$. Damit ist (1) bewiesen.

Ist P offen, so können wir N_A anwenden und erhalten eine normalisierte Struktur mit den gleichen Atomträgern. Nun fassen wir alle $z \in N(N_A P)$ mit dem gleichen Träger zu einem Atom zusammen und erhalten auf diese Weise $N(N_A^{-1}N_A P)$. Nun war das alte N(P) durch N_A in eine Menge von Idealen zerlegt worden, die den Eigenschaften in der Definition von

N_A genügen. Wenn wir also in der oben beschriebenen Weise diese Ideale wieder zusammenfassen, kommen wir auch zu N(P) zurück.

Wir kommen jetzt zur Definition von :

D. — Sei P eine offene, aber nicht notwendigeweise normalisierte Tangentialstruktur. Bereits mehrfach haben wir erwähnt (z.B. am Ende des ersten Abschnittes), daß man die Wurzeln W(P) selbst als Atombereich erklären kann. Wir setzen hier und im Folgenden voraus, daß P die folgende Eigenschaft hat: Zu jedem $a \in P'$, $z < a$ $z \in N$, erzeugt z auf $X = \bigcup_{z < a} |z_1|$ ein Element b, $|b| = X$. Offenbar ist für P_r, D_r und M_r diese Voraussetzung erfüllt. Die duale Forderung lautet :

Ist $w \in W(P)$, so gibt es ein $v \in W(P)$, $v \leqslant w$, $|v|_A = \bigcap_{a \in w} |a|$. Diese beiden Eigenschaften wollen wir von nun an überall da, wo Fortsetzungs- und Dualitätstheorie getrieben wird, fordern. Ferner setzen wir voraus, dass es zu jedem $w \in W(P)$, $X \leqslant |w|_A$ $X \neq \emptyset$ ein $v \in W(P)$ mit $|v|_A = X$ gibt.

Da P offen ist, gibt es wegen Definition 1.5 nur ein $w \in W(P)$ mit dem Träger $|w|_A$. Es ist also $OW(P) = W(P)$. Wir kehren in P′ die Anordnung um und führen in W(P) die Anordnung ein, die durch die Inklusionen der w, aufgefaßt als Teilmengen von P′, gegeben werden. Jetzt setzen wir $N(DP) = P'$ mit dieser dualen Anordnung. Wir setzen $(DP)' = W(P)$. Es wird $w > a$, $w \in W(P)$ $a \in P'$ gesetzt, wenn $a \in w$ ist. Als Normbereich von DP erklären wir DA, den zu A dualen Verband, als N(DP) den Bereich W(DP), aber ohne Anordnung. Die Null $O \in P$ übernimmt hier die Rolle des maximalen Elementes E in DP und umgekehrt. Im Übrigen verweisen wir auf das, was wir bezüglich dieser beiden Elemente bereits gesagt haben.

(2.4) Es ist DP eine offene und einfache Tangentialstruktur.

Beweis. — Wir gehen die Axiome von Definition 0.1 durch :

Zu 1. — Ist $a \leqslant b$ in DP, so sind entweder a, $b \in W(P)$ und dann ist $|a|_A \geqslant |b|_A$, also $|a| \leqslant |b|$ in DA, oder es ist $a \in P'$ das aber heißt, daß $a \in b \in W(P)$ ist. Da $|b|_A \leqslant \bigcap_{c \in b} |c|$ ist, gilt auch hier $|a|_A \geqslant |b|_A$ und daher $|a| \leqslant |b|$ in DA.

Zu 2. — Da (2) aus (5 a) folgt, brauchen wir es nicht besonders zu beweisen.

Zu 3. — Ist $z \in \mathrm{N(DP)}$, $a \in \mathrm{DP}$, $z \geqslant a$, so ist $a \in \mathrm{P}'$, aber da P' als Atombereich von DP nicht angeordnet war (in DP), ist $z = a$.

Zu 4*a*. — Ist $a \in \mathrm{DP}$, $a \neq 0$, d.h. in P $a \neq \mathrm{E}$, so ist entweder $a \in \mathrm{N(DP)} = \mathrm{P}'$ und es gibt ein Atom $z < a$, nämlich a selber, oder es ist $a \in (\mathrm{DP})' = \mathrm{W(P)}$. Dann aber gibt es ein $b \in \mathrm{P}'$, $b \in a$, also $b \subset a$ in DP, wegen (4 b) für P. Da $b \in \mathrm{N(DP)}$, ist (4 a) für DP gezeigt.

Zu 4*b*. — Ist $a \in \mathrm{P}' - \{\mathrm{E}\}$, also $a \in \mathrm{N(DP)}$, so gibt es, wegen (4 a) für P, ein $z \in \mathrm{N(P)} = \mathrm{W(P)}$, $z < a$. Daher ist $z > a$ in DP und (4 b) für DP gezeigt.

Zu 5*a*. — Ist $a \leqslant b_1$, b_2 in DP, $|b_1| = |b_2|$, dann ist entweder b_1, $b_2 \in \mathrm{N(DP)} = \mathrm{P}'$ und $a = b_1 = b_2$. Anderenfalls ist b_1, $b_2 \in \mathrm{W(P)}$, aber da P offen ist, heißt das $b_1 = b_2$. Damit ist (5a) bewiesen.

Zu 5*b*. — Ist $a \in (\mathrm{DP})'$, $\mathrm{X} \in \mathrm{DA}$, $\mathrm{X} \geqslant |a|$ in DA, so ist $\mathrm{X} \leqslant |a|_{\mathrm{A}}$ in A und $a \in \mathrm{W(P)}$. Wir bilden das Element $w_{\mathrm{X}} \in \mathrm{W(P)}$, das durch X bestimmt wird, und existiert, wenn $\mathrm{X} \neq \emptyset$ ist, und es ist $a \leqslant w_{\mathrm{X}}$ in DP. Ist $\mathrm{X} = \emptyset$, so ist sicher für $\mathrm{O} \in \mathrm{P}$, $\mathrm{O} \geqslant a$ in DP. Damit ist (5b) bewiesen.

Da es zu jedem $|w|_{\mathrm{A}} \in |\mathrm{W(P)}|_{\mathrm{A}}$ nur ein $w \in \mathrm{W(P)}$ mit diesem Träger gibt, ist DP einfach.

Da P einfach war, gibt es zu jedem $a \in \mathrm{P}'$ nur ein a mit diesem Träger. Darum ist DP offen.

Damit ist (2.4) bewiesen.

Wir sehen aus dem letzten Teil des Beweises, daß « einfach » und « offen » Eigenschaften darstellen, die dual im Sinne der durch D vermittelten Dualität sind.

(2.5) Es ist für eine offene Struktur

$$\mathrm{D}^2\mathrm{P} = \mathrm{P}.$$

Beweis. — Die Konstruktion von DP verläuft so, daß P' und W(P) vertauscht werden, wobei die Abordnung umgekehrt wird. (Gewöhnlich nimmt man auch in W(P) die Anordnung, die durch die Träger in A induziert wird.) Die zweimalige Anwendung dieses Prozesses liefert wieder P. Das

gilt natürlich auch für A, da $D^2A = A$ eine einfache verbandstheoretische Tatsache ist.

Nun haben wir alles zusammengetragen, was nötig war, um die allgemeine Dualität zu konstruieren:

DEFINITION 2.1. — *Sei* P *eine einfache, normalisierte Struktur, so erklären wir:*

$$\tilde{P} = N_A D N_A^{-1} P.$$

Wir nennen $W(\tilde{P}) = K(P)$ *den Bereich der Kowurzeln von* P.

Auf diese Weise kommen wir zu dem Satz:

SATZ 3.1. — *Ist* P *eine einfache, normalisierte Tangentialstruktur, so gibt es eine eindeutig bestimmte Tangentialstruktur* $\tilde{P}$, *welche ebenfalls einfach und normalisiert ist, sodaß gilt:*

$$\tilde{\tilde{P}} = P.$$

Beweis. — Ist P einfach, so ist $N_A^{-1}P$ wegen (2.2), $DN_A^{-1}P$ wegen (2.4) und $N_A DN_A^{-1}P$ wegen (2.1) einfach. Ist P normalisiert, so ist $N_A^{-1}P$ offen, DN_A^{-1} P offen und $N_A DN_A^{-1}$ normalisiert wegen (2.2), (2.4) und (2.1). Alle Konstruktionen sind eindeutig, also ist P eindeutig.

Es ist

$$\tilde{\tilde{P}} = N_A D N_A^{-1} N_A D N_A^{-1} P.$$

Wegen (2.3) und (2.5) ist das aber gleich P.

Das beendet den Beweis von Satz 2.1.

Wir sprechen von einem Quasiepimorphismus $f: W(a) \to W(a_1)$ ($a \in P'$, $a_1 \in Q'$ für zwei Tangentialstrukturen P, Q; $W(a) = W(\hat{a})$ entspr. für a_1), wenn f ein anordnungserhaltender Homomorphismus ist, zu dem es einen $\cap$-Homomorphismus

$$|f| : |W(a)|_{|P|} \to |W(a_1)|_{|Q|} \quad \text{mit} \quad |f|\,|w|_{|P|} = |fw|_Q$$

gibt und wenn zu jedem $b_1 \in \hat{a}_1$ eine absteigende Folge von Wurzelträgern $|w_i|_A \in |W(a_1)|_A$ mit $\cup |w_i|_A = |b_1|$ gibt, sodaß zu jedem w_i ein $v_i \in W(a)$ mit $fv_i = w_i$ existiert. Da im Folgendem im Rahmen der Dualitätstheorie nur Quasiepimorphismen auftreten, sprechen wir einfach von Epimorphismen.

Wenn aus der Tatsache, daß $w_1 \in W(a_1)$ in $X \leqslant |a_1|$ erzeugt,

folgt, daß jedes $w \in f^{-1} w_1$ in $|f|^{-1}$ X erzeugt, dann nennen wir f dualisierbar, wenn folgendes gilt:

(1) Zu jedem $w_1 \in f\mathrm{OW}(a)$ gibt es einen Monomorphismus

$$\varphi : \hat{w}_1 \to \mathrm{OW}(a),$$

($\hat{w}_1 = \{v | v \in f\mathrm{OW}(a) \cap \mathrm{OW}(a_1),\ v \leqslant w_1\}$), so daß $f\varphi$ die Identität ist.

(2) Zu jedem $w \in \mathrm{OW}(a)$ gibt es ein $v \geqslant w$, ein $w_1 \in \mathrm{OW}(a_1)$ und einen unter (1) geschilderten Monomorphismus, sodaß $v \in \varphi\hat{w}_1$ ist. Die Menge der Abbildungen φ nennen wir Df.

Wir können sofort diesen Begriff dualisieren und von einem Epimorphismus

$$f : \mathrm{K}(w) \to \mathrm{K}(w_1)$$

sprechen, $w \in \mathrm{OW(P)}$, $w_1 \in \mathrm{OW(Q)}$. Wegen Satz 2.1 entsprechen den Elementen von P, Q gerade die offenen Wurzeln und den Wurzeln die Kowurzeln. Die Abbildungen $\varphi \in \mathrm{D}f$ gehen jetzt von den Elementen $a_1 \in w_1$ in die Elemente $a \in w$, nämlich gerade von den offenen Kowurzeln, die größer als w_1 sind, in die offenen Kowurzeln, die größer als w sind.

Im Falle von M_r ist es so, daß jeder duale Quasiepimorphismus sogar zu einem regelrechten Epimorphismus fortsetzbar ist.

Der Grund, Quasiepimorphismen und nicht Epimorphismen zu betrachten, ist der, daß leider nicht das Urbild einer $\leqslant r$-dimensionalen Menge unter einer eineindeutigen stetigen Abbildung $\leqslant r$-dimensional ist.

Diese Begriffe werden wir im nächsten Abschnitt, bei der Definition der Fortsetzungen, verwenden. Im 5. und 6. Abschnitt werden wir sie entscheidend ausnutzen.

Die Strukturen P_r, M_r, D_r sind normalisiert und einfach, so daß wir alle unsere Überlegungen auf diese Standardbeispiele anwenden können.

3. Fortsetzungen von Tangentialstrukturen. — Wir geben in diesem Abschnitt ein Verfahren an, wie man aus einer Tangentialstruktur P neue, reichhaltigere gewinnen kann. Insbesondere interessieren zwei extreme Strukturen P^i, P^p, die injektive bzw. projektive Fortsetzung von P. Die injektive Fortsetzung ist der Konstruktion der $\geqslant r$-dimensionalen Teilmengen des

R^n aus dem Bereich der Polyeder nachgebildet. Die projektive Fortsetzung von P_r führt zu den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Wie schon des öfteren betont wurde, werden wir diese Fortsezungstheorie mit der Dualitätstheorie verbinden. Dies wird im 4. Abschnitt geschehen, aber schon an den Definitionen 3.1 *a*, *b* erkennt man, daß sie dual zueinander sind.

Außerdem enthält dieser Abschnitt einen einfachen Existenzbeweis für die projektive bzw. injektive Fortsetzung.

DEFINITION 3.1. *a.* — *Seien* P, P^i ($P \subset P^i$) *zwei Tangentialstrukturen über dem Normbereich* A, *so daß es zu jedem* $b \in P^{i'}$, *ein* $a \in P^{i'}$, *und ein* $a_1 \in P'$ *gibt*, $b \geqslant a$, *daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1 *a*) *Es gibt einen dualisierbaren Epimorphismus*

$$\varphi : W(a) \to W(a_1).$$

(2 *a*) *Ist* $|a_1| = |a|$, *dann wird durch* φ *die Menge*

$$W_P(a) = \{w \mid w \in W(a) \cap W(a_1)\}$$

isomorph auf $W(a_1)$ *abgedildet.*

(3 *a*) *Es ist* P^i *maximal mit diesen Eigenschaften.*

Unter diesen Umständen nennen wir P^i *die injektive Fortsetzung von* P.

Wir wollen die Definition 3.1 *a* grob so formulieren: Es ist P^i im kleinen auf P abbildbar. Bei der Untersuchung der Dimensionstheorie wird φ die Rolle einer wesentlichen Abbildung übernehmen, wie wir schon in der Einleitung bemerkt haben.

Die Forderung, daß φ dualisierbar ist, hängt in der Dimensionstheorie mit dem folgenden dimensionstheoretischen Satz zusammen:

(*) Ist $a \in D'_r$, $a \leqslant I^r$, dann enthält *a* eine offene Menge in I^r, d.h. dann ist $a \in P'_r$.

(3.1) Ist $X \in D'_r$ und $\psi : W(X) \to W(I^r)$ ein Epimorphismus, von dem wir wissen, daß er offene Atome in offene Atome überführt, so ist ψ dualisierbar.

Beweis. — Sei $w \in OW(I^r)$, so ist $w = \cap\ (z_0)$ wo $z_0 \in OW(I^r)$ offene Atome sind. Wegen (*) ist dim $|w|_A < r$. Nun gibt

es, da f ein Epimorphismus ist, ein $Y \subset X$, mit $fY = |w|_A$, $\dim Y \leqslant r-1$. Man kann also zu jedem z_0 ein $z'_0 \in OW(X)$ finden, $|z'_0|t \in R^n$, sodaß $fz'_0 = z_0$ und sodaß $\dim |\cap (z'_0)|_A \leqslant r-1$ ist. Es ist also $w_1 = \cap (z'_0)$ eine Wurzel mit $fw_1 = w$. Man kann offenbar für jede $v \leqslant w$, $v \in OW\ (I^r)$ ein solches $v_1 \in OX(X)$ finden, sodaß $\psi\ v_1 = v$ und $v_1 \leqslant w_1$ ist. Also ist f ein anordnungserhaltender Monomorphismus. Ist $w_1 \in OW(X)$ eine beliebige Wurzel, so findet man ein offenes Atom $z'_0 \geqslant w_1$ und den eben konstruierten Monomorphismus $f \in D\psi$, $f : \hat{z}_0 \rightarrow \hat{z}'_0$, $\psi z'_0 = z_0$.

Die Definition einer projektiven Fortsetzung ist zu Definition 3.1 *a* dual.

Definition 3.1*b*. — *Seien* P, P^p, $(P \subset P^p)$ *zwei Tangentialstrukturen, sodaß es zu jedem* $v \in OW(P^p)$ *ein* $w \in OW(P^p)$ *und ein* $w_1 \in OW(P)$ *gibt,* $v \leqslant w$, *daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1*b*) *Es gibt einen dualisierbaren Epimorphismus:*

$$\varphi : K(w) \rightarrow K(w_1).$$

(2*b*) *Ist* $|w_1|_A = |w|_A$, *dann wird durch* φ *die Menge* $K_p(w) = \{k | k \in K(w) \cap K(w_1)\}$ *isomorph auf* $K(w_1)$ *abgebildet.*

(3*b*) *Es ist* P^p *maximal mit diesen Eigenschaften.*

Unter diesen Umständen nennen wir P^p *die projektive Fortsetzung von* P.

Wir nennen $[P^i]$ *bzw.* $[OW(P^p)]$ die Menge aller a bzw. w in Definition 3.1 *a, b.*

Wir beweisen nun die Existenz einer injektiven bzw. einer projektiven Fortsetzung.

Satz 3.1 *a.* — *Zu jedem* P *gibt es immer ein eindeutig bestimmtes* P^i.

Beweis. — Unser Beweisverfahren besteht darin, die Vereinigung aller Strukturen Q zu bilden, die (1*a*), (2*a*), aber nicht notwendig (3*a*) erfüllen. Solche Q nennen wir schwache injektive Fortsetzungen. Es gibt sicherlich eine schwache injektive Fortsetzung, nämlich P selbst mit $a = a_1$, $\varphi =$ Indentität. Sind Q_1, Q_2 beide schwache injektive Fortsetzungen, so erklären wir zunächst $Q'_1 \cup Q'_2$. Wir identifizieren zwei $q_i \in Q'_i$ mit $|q_1| = |q_2|$ in A. Jetzt können wir $Q'_1 \cup Q'_2$ bilden. Da

Q_i einfach ist, ist jedes $q \in Q_1' \cup Q_2'$ eindeutig bestimmt. Ist $z_i \in N(Q_i)$, so identifizieren wir z_1 und z_2, wenn $(z_1) = (z_2)$ in $Q_1' \cup Q_2'$ ist. Ist $|z_1| = |z_2|$, $(z_1) \supseteq (z_2)$, so lassen wir z_2 fort. Auf diese Weise erhalten wir ein $N(Q_1 \cup Q_2)$, welches $Q_1' \cup Q_2'$ zu $Q_1 \cup Q_2$ ergänzt. Ist $a \in [Q_1'] \cup [Q_2'] - Q_1' \cap Q_2'$, dann gibt es ein Paar $t = (\varphi, a_1)$ wie für a in Definition 3.1 *a*, für q. Dieses Paar können wir auch in $Q_1 \cup Q_2$ beibehalten.

Ist $p \in Q_1' \cap Q_2'$ und gibt es ein $p \geqslant q = [Q_1'] \cup [Q_2'] - Q_1' \cap Q_2'$, so verfahren wir wie oben.

Ist $q \in Q_1' \cap Q_2'$, dann gibt es ein Paar $q_i \in Q_i'$ mit

$$|q_1| = |q_2| = |q|.$$

Ferner gibt es ein Paar $t^i = (\varphi^i, a_1^i)$ für $q_i (i = 1, 2)$. Anstelle von q betrachten wir dasjenige Element $q' \in Q_1'$, $q' \leqslant q$ mit $\overline{|q'|} \doteq \overline{|q_1|}$ und $|q'| = \bigcup_{z < q'} |z| ((z \in N(Q_1))$, welches es nach Definition gibt. Wir verwenden das Paar t^1 für q' und müssen nur noch für die Wurzeln w_2, die nicht in $W(q_1)$ liegen, aber in $W(q')$, die Abbildung φ erklären. Wir bilden die Gesamtheit aller Wurzeln $v \in W(q_1)$ mit $|v'|_A = |w_2|_A$ und $v \leqslant w_2$. Dann setzen wir $\varphi(w_2) = \varphi^1 \cap v$. Es ist $\varphi(w_2)$ eine Wurzel, denn $\cap v$ ist eine Wurzel in q_1, da $| \cap v|_A = |w_2|_A$ ein Wurzelträger in q_1 ist. Andernfalls wäre q_2 keine Wurzel in $Q_1 \cup Q_2$. Diese Abbildung ist anordnungserhaltend, da φ^1 es war. Es gehen offene Atome wieder in offene Atome über, weil die Atomträger die gleichen geblieben sind. Also ist auch das neue dualisierbar. Eigenschaft (2*a*) wird offenbar durch unsere Konstruktionen nicht berührt. Wir setzen $P^i = \cup Q_i$ für alle schwachen injektiven Fortsetzungen. Das ist die eindeutig bestimmte Struktur P^i.

SATZ 3.1 *b*. — *Zu jedem* P *gibt es ein eindeutig bestimmtes* P^p.

Beweis. — Wir können den obigen Beweis Wort für Wort dualisieren. Wir verzichten aber darauf und beweisen Satz 3.1 *b*, indem wir auf Formel (5) aus dem Korollar von Satz 4.1 zurückgreifen. Da es zu P ein eindeutig bestimmtes $\widetilde{\tilde{P}^i}$ gibt, existiert

$$P^p = \widetilde{(\tilde{P})^i}.$$

4. Fortsetzungen von $\tilde{\mathrm{P}}$. — Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist in Satz 4.1 zusammengefaßt und lautet:

$$\tilde{\mathrm{P}}^p = \widetilde{\mathrm{P}^i}, \tag{1}$$
$$\tilde{\mathrm{P}}^i = \widetilde{\mathrm{P}^p}. \tag{2}$$

Hierdurch werden die Fortsetzungs- und die Dualitätstheorie miteinander verbunden. Es ist (2) eine Folge von (1), ebenso umgekehrt: Schreiben wir (1) für $\tilde{\mathrm{P}}$ anstelle von P auf und benutzen Satz 2.1, dann erhalten wir:

$$\mathrm{P}^p = \widetilde{\tilde{\mathrm{P}}^i}.$$

Jetzt dualisieren wir diese Gleichung, verwenden noch einmal Satz 2.1 und erhalten (2). Ebenso schließt man umgekehrt.

In diesem Abschnitt soll (1) bewiesen werden. Der Beweis ist jetzt nicht mehr schwer, er besteht in einer konsequenten Anwendung der Definitionen 3.1 *a*, *b* und Definition 2.1. Die Definitionen 3.1 *a*, *b* sind schon so formuliert, daß alles sehr einfach wird. Wir beweisen zunächst die schwächere Form von (1), nämlich

$$\widetilde{\mathrm{P}^i} \supseteq \tilde{\mathrm{P}}^p. \tag{3}$$

Ist $\tilde{\nu} \in \mathrm{OW}(\tilde{\mathrm{P}}^p)$, so gibt es ein $\tilde{w} \in \mathrm{OW}(\tilde{\mathrm{P}}^p)\tilde{\nu} \leqslant \tilde{w}$ und ein $\tilde{w}_1 \in \mathrm{OW}(\tilde{\mathrm{P}})$ sowie einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{K}(\tilde{w}) \to \mathrm{K}(\tilde{w}_1).$$

Da $\tilde{w}_1 \in \mathrm{P}'$ ist, ist wegen der Dualitätskonstruktion und da (3*b*), in Definition 3.1*b* das duale Gegenstück zu (3*a*) ist $\tilde{w} \in [\mathrm{P}^i]$ und $\tilde{\nu} \in \mathrm{P}^{i'}$. Da aber andererseits jedes $a \in \mathrm{P}^{i'}$ ein $\tilde{\nu} \in \mathrm{OW}(\widetilde{\mathrm{P}^i})$ ist, und da es wegen Definition 3.1 *a* einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : \mathrm{W}(a') \to \mathrm{W}(a_1)$$

für ein $a = \tilde{w} \geqslant \tilde{\nu}$, $\tilde{w} \in \mathrm{OW}(\widetilde{\mathrm{P}^i})$ gibt, für $a_1 = \tilde{w}_1 \in \mathrm{OW}(\tilde{\mathrm{P}})$, ist $\widetilde{\mathrm{P}^i} \subseteq \tilde{\mathrm{P}}^p$. Die Forderung (3 *b*) für $\tilde{\mathrm{P}}^p$ ist wieder erfüllt, da (3 *a*) für P^i richtig war. Also gilt:

SATZ 4.1. — *Es ist*

(1) $$\tilde{\mathrm{P}}^p = \widetilde{\mathrm{P}^i}$$

(2) $$\tilde{\mathrm{P}}^i = \widetilde{\mathrm{P}^p}.$$

KOROLLAR. — *Die injektive Fortsetzung von* P *läßt sich durch Dualisierung sowie den projektiven Fortsetzungsprozeß wie folgt beschreiben:*

(4) $$\mathrm{P}^i = \widetilde{\tilde{\mathrm{P}}^p}$$

und umgekehrt

(5) $$\mathrm{P}^p = \widetilde{\tilde{\mathrm{P}}^i}.$$

5. **Dimensionstheorie.** — Die Theorie, welche wir in den vorangehenden Abschnitten behandelt haben, bekommt erst dadurch ihre Bedeutung, daß sie mit den Beispielen aus der Einleitung in einen sinnvollen Zusammenhang gebracht wird. Dieser Abschnitt ist dem Beweis der Tatsache gewidmet, daß $\mathrm{P}^i = \mathrm{D}_r$ ist. Wir zeigen also, daß durch unser Verfahren der injektiven Fortsetzung gerade die $\geqslant r$-dimensionalen Mengen im R^n gewonnen werden können. Der Beweis wird in zwei Teile zerfallen: Zunächst muß man zeigen, daß es zu jedem $a \in \mathrm{P}_r^{i'}$ immer eine Abbildung

$$f : |a| \to |a_1|,$$

$a_1 \in \mathrm{P}_r$ gibt, die wesentlich ist. Dann beweisen wir die Umkehrung: Zu jedem $a \in \mathrm{D}_r'$ gibt es immer einen dualisierbaren Epimorphismus

$$\varphi : \mathrm{W}(a) \to \mathrm{W}(a_1)$$

für geeignete $a_1 \in \mathrm{P}_r'$.

Im Folgenden werden wir uns die Freiheit nehmen, des Öfteren a anstelle von $|a|$ zu schreiben ($a \in \mathrm{D}_r'$ oder $\mathrm{P}_r^{i'}$), da die Normabbildung auf diesem Bereich eindeutig umkehrbar ist: Aus $|a_1| = |a_2|$ folgt $a_1 = a_2$.

Zu Beginn erinnern wir uns noch einmal an die Definition der Atome in P_r bzw. D_r:

Ein Atom $z \in \mathrm{N}(\mathrm{P}_r)$ wird durch ein Ideal (z) beschrieben, sodaß

(1) $|z| = |(z)|_\Lambda \in \mathrm{R}^n$ ist.

(2 a) Für jede Umgebung $\mathrm{U}(|z|)$ und jedes $a \in (z)$ ist $\mathrm{U}(|z|) \cap a \in (z)$.

(2 b) Es gibt ein Simplex $\sigma^r \in P'_r$, sodaß $a \leqslant \sigma^r$ für alle hinreichend kleinen $a \in (z)$.

(3) Es ist (z) maximal mit den Eigenschaften (1), (2).

Ein Atom $z \in N(D_r)$ wird ebenfalls durch ein Ideal (z) beschrieben, welches (1), (2 a) und (3) erfüllt. Die Bedingung (2 b) ist fortgefallen.

Wir bemerken an der Stelle, daß nicht jedes Atom $z < a$, $a \in D'_r$ einen r-dimensionalen Punkt beschreibt. Es kann $|z|$ auch Häufungspunkt von $\geqslant r$-dimensionalen Punkten in a sein. Ist $x \in R^n$, $x \leqslant |a|$ ein solcher Punkt, so ist ein Atom $z < a$ mit $|z| = x$ wegen (2a) vorhanden. Man kann also $|\bar{a}|$ als die Menge aller Häufungspunkte von $\geqslant r$-dimensionalen Punkten beschreiben. Wenn wir für ein $X \in D'_r X_1$ diese Menge aller $|z|$, $|z| \in X$ nennen, dann ist X_1 abgeschlossen in X.

Wir sammeln jetzt eine Reihe von Tatsachen über D_r:

(5.1) Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung, $X \in D'_r$, $Y \in P'_r$ und $Y_1 \subseteq Y$ in P'_r, dann gibt es immer eine abnehmende Folge von Wurzelträgern $|w_i|_A$, sodaß $Y_1 = U|w_i|_A$ und sodaß es zu jedem w_i ein $v_i \in W(X)$ mit $fv_i = w_i$ gibt.

Der Beweis ist offenbar trivial, denn die Punkte in Y und deren abzählbare Vereinigungsmengen liefern ein solches System von Wurzelträgern. Allerdings darf man nicht fordern, daß die Menge der w_i abzählbar ist.

Der Sinn von (5.1) ist, zu zeigen, daß jede Abbildung $f: X \to Y$ Anlass zu einem dualisierbaren Epimorphismus gibt, in der Art, wie wir sie in (3.1) bereits angedeutet haben.

Wir kommen auf unsere Untersuchung bezüglich der Atome zurück:

(5.2) Ist $X \in D'_r$, so ist X_1 (die Menge aller Atomträger in X) ebenfalls in D'_r enthalten.

Beweis. — Da X_1 abgeschlossen ist, ist $Y = X - X_1$ offen. Wäre $\dim X_1 < r$, dann wäre $\dim \mathrm{Rd}\, Y < r$, da $\mathrm{Rd}\, Y \leqslant X_1$ ist. Weiterhin ist $\mathrm{Rd}\, Y$ abgeschlossen in $Y_1 = Y \cup \mathrm{Rd}\, Y$ und Y offen in Y_1 sowie Y_1 abgeschlossen in X. Da Y keinen $\geqslant r$-dimensionalen Punkt in X, also erst recht nicht in Y enthält, ist $\dim Y < r$. Jetzt können wir den Summensatz der Dimensionstheorie verwenden und finden:

$$\dim Y \cup \mathrm{Rd}\, Y = \dim Y_1 < r$$

und

$$\dim X = \dim Y_1 \cup X_1 < r$$

entgegen unserer Voraussetzung, daß $X \in |D'_r|$ ist.

Wir bemerken, daß (5.2) falsch wird, wenn wir anstelle der Atomträger die $\geqslant r$-dimensionalen Punkte nehmen. Bekanntlich gibt es Mengen X, mit $\dim X \geqslant r$ sodaß die Menge aller $\geqslant r$-dimensionalen Punkte eine Dimension $< r$ hat.

Ist $a_1 \in P'_r$ und I^r ein r-dimensionaler Würfel, so findet man immer eine Abbildung $h: |a_1| \to I^r$, die wesentlich ist. Wir nehmen ein Simplex $\sigma^r \subset a_1$ und retrahieren $|a_1|$ auf σ^r. Anschließend bilden wir σ^r homöomorph auf I^r ab. Weiter unten werden wir einer solchen Abbildung h einen dualisierbaren Epimorphismus $h: W(a_1) \to W(I^r)$ zuordnen.

Ist $f: |a| \to |a_1|$, $a \in D^r$ eine in allen Punkten von $|a_1|$ wesentliche Abbildung, so kann man $g = hf$ bilden und wir behaupten, daß g wesentlich ist. Wäre g im Punkte $x \in I^r$ nicht wesentlich, so wäre es auch in dem eindeutig bestimmten Punkte $h^{-1}(x) \in \sigma^r$ nicht wesentlich gewesen, entgegen unserer Voraussetzung. Diese Überlegungen fassen wir zu der einen Behauptung zusammen:

(5.3) Wir können uns bei unseren Betrachtungen auf $a_1 = I^r$ beschränken.

(5.4) Ist

$$f: W(a) \to W(a_1)$$

ein dualisierbarer Epimorphismus ($a \in P^{i'}_r$, $a_1 \in P'_r$), so gehen offene Wurzeln in offene Wurzeln über und umgekehrt gibt es in der Menge $f^{-1}(w_0)$, $w_0 \in OW(a_1)$ eine offene Wurzel $w'_0 \in OW(a)$.

Beweis. — Zunächst wird bewiesen, daß offene Atome z_0 in offene Atome übergehen:

Da $|z_0| \in R^n$ ein Punkt und f ein dualisierbarer Epimorphismus ist, ist auch $|fz_0| \in R^n$. Das von ihm erzeugte offene Atom nennen wir z'_0. Da f dualisierbar ist, gibt es einen Monomorphismus $\varphi: \hat{z}'_0 \to \hat{z}_0$, sodaß $f\varphi =$ Identität und $z_0 \in \varphi(\hat{z}'_0)$ ist. Hierbei haben wir $\hat{z}_0 = \{w_0 | w_0 \in OW(a_1), w_0 \leqslant z_0\}$ und entsprechend für z_0 gesetzt. Daraus folgt aber $\varphi z'_0 = z_0$ und $fz_0 = z'_0$.

Sei nun $w_0 \in \mathrm{OW}(a)$. Wegen der Definition der offenen Wurzeln ist:

$$w_0 = \bigcap_{z_0 \geqslant w_0} (z_0).$$

Es ist $|fw_0|_A = \cap\, |fz_0|_A$. Ist $w_0 \leqslant z_0$. so ist auch $fw_0 \leqslant fz_0$, also ist $fw_0 \leqslant f(z_0)$ und da $\cap\,(fz_0)$ offen und $|fw_0|_A = \cap\,|(fz_0)|_A$ ist, folgt, daß fw_0 offen ist.

Ist umgekehrt $w_1 \in \mathrm{OW}(a_1) \cap f\mathrm{OW}(a)$, $\mathrm{X} \geqslant |a|$, $|f|\mathrm{X} = |w_1|_A$, so ist die von X bestimmte offene Wurzel w_X die kleinste, mit dem Träger X. Es ist $|fw_\mathrm{X}|_A = |w_1|_A$, aber da fw_X offen ist, muß $fw_\mathrm{X} = w_1$ sein. Damit ist (5.4) bewiesen.

Wir erinnern uns an die Behauptung (3.1), wo die Umkehrung zu (5.4) bewiesen wurde.

Ist

$$f\colon\ \mathrm{W}(a) \to \mathrm{W}(a_1)$$

gegeben, so ist durch $|f|$ eine Abbildung von $|\bar{a}|$ auf $|\bar{a}_1|$ bestimmt wenn $|a| = \bigcup_{z<a} |z|$ ist. Das Umgekehrte ist allerdings nicht der Fall. Der Kenntnis von einem $|f|$ liefert uns hier kein eindeutig bestimmtes f.

Wir zeigen zunächst, daß, wenn f ein dualisierbarer Epimorphismus ist, $|f|$ eine wesentliche Abbildung ist. Damit hätten wir dann die erste Hälfte unseres Zieles erreicht, nämlich wir hätten bewiesen, daß $\mathrm{P}_\mathfrak{r}^{\mathfrak{t}} \subseteq \mathrm{D}_\mathfrak{r}$ ist.

(5.5) Es ist $|f|$ stetig.

Beweis. — Man kann sehr einfach zeigen, daß $|f|$ in der Topologie $\mathfrak{t}_{\mathrm{P}_\mathfrak{r}}$ stetig ist: Ist X offen in a_1, so erzeugt jedes Atom $z \in \mathrm{N}(a)$, $|fz| \in \mathrm{X}$ in $f^{-1}\,\mathrm{X}$, also ist auch $f^{-1}\,\mathrm{X}$ offen in $\mathfrak{t}_{p_\mathfrak{r}^\mathfrak{t}}$. Da f dualisierbar ist gibt es einen Monomorphismus

$$\varphi\colon\ f\mathrm{OW}(a) \to \mathrm{OW}(a),$$

sodaß $f\varphi$ die Identität ist. Es ist φ ein Isomorphismus von $f\mathrm{OW}(a)_1$ auf $\varphi f\mathrm{OW}(a)$. Ist X offen in $|\varphi f\mathrm{OW}(a)|$, so ist $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \cap |\varphi f\mathrm{OW}(a)|$, wobei Y offen in a ist (alles rel. $\mathfrak{t}_{p_\mathfrak{r}^\mathfrak{t}}$). Nun ist der Ubergang von $\mathfrak{t}$ zu $\mathfrak{p}$ in (1.4) ein, im Sinne der Tangentialstrukturen invarianter Prozeß, d.h. sind P und Q isomorph, so sind $\mathfrak{t}_p$ und $\mathfrak{t}_\mathrm{Q}$ und $\mathfrak{p}_p$ und $\mathfrak{p}_\mathrm{Q}$ isomorph. Das

aber heißt, daß offene (rel. $\mathfrak{p}_{p_r}$) Mengen in $|a_1|$ in offene Mengen in P_r^i (rel. $\mathfrak{p}_{p_r^i}$) übergehen.

(5.6) Es ist $|f|$ wesentlich, wobei wir $a_1 = I^r$ setzen.

Beweis. — Wäre $|f|$ an allen Stellen unwesentlich, dann sei S^{r-1} ein $(r-1)$ — Simplex, welches I^r in zwei Teile, I_1^r und I_2^r zerlegt. Nun kann man ein Teilsimplex $T^{r-1} \subset S^{r-1}$ und ein zu $|f|$ beliebig benachbartes g, sowie eine Umgebung U(T) rel. I_1^r finden, sodaß $g(|a|) \subset I^r - U$ und sodaß eine Umgebung V(T) rel. I_2^r existiert, sodaß $|f| = g$ auf $|f|^{-1}$ V(T) ist. Ist $x \in |a|\, y = |f|\, x \in T^{r-1}$ und wie üblich, $\mathfrak{w}_x$ das entsprechende offen Atom mit $|\mathfrak{w}_x|_A = x$, so ist $|f||b|$ $(b \in \mathfrak{w}_x)$ nicht offen in I^r. Sei $\varphi \in W(I^r)$, $\varphi \in W(I_1^r)$, so ist kein $\varphi_1 \in W(a)$ mit $|\varphi_1|_A = x$, $f\varphi_1 = \varphi$ vorhanden, also kann $f\mathfrak{w}_x$ nicht offen gewesen sein, entgegen unseren Voraussetzungen.

Sei $|f|$ eine stetige, wesentliche Abbildung:

$$|f| : |a| \to |a_1|,$$

so erklären wir eine Abbildung

$$f : W(a) \to W(a_1)$$

$a \in D_r'$, $a_1 \in P_r'$ in folgender Weise:

Ist $\mathfrak{w} \in W(a) - OW(a)$, so bilden wir die Menge

$$|f|(\mathfrak{w}) = \{|f||b| \,|\, b \in \mathfrak{w}\}.$$

Es ist zwar $|f|(\mathfrak{w})$ kein Ideal in I^r, also schon garnicht eine Wurzel, aber es ist $|f|(\mathfrak{w})$ ein Ideal im Bereich aller Teilmengen von I^r. Sei $z \in N(P_r)$ ein Atom mit der folgenden Eigenschaft:

(*) Zu jedem $c \in (z)$ gibt es ein $c_1 \in |f|(\mathfrak{w})$, mit $\bar{c} \cap |c_1| \neq \emptyset$. (Der Querstrich bedeutet hier die abgeschlossene Hülle).

Wir setzen $f\mathfrak{w} = \cap\,(z)$. Da $\mathfrak{w}$ eine Wurzel war, ist auch $f\mathfrak{w}$ eine Wurzel mit $|f\mathfrak{w}|_A = |f||\mathfrak{w}|_A$. Ist $\mathfrak{w} \in OW(a)$, so setzen wir $f\mathfrak{w}$ gleich derjenigen offenen Wurzel, die durch $|f||\mathfrak{w}|_A$ bestimmt wird.

Wir behaupten:

(5.7) Es ist f ein dualisierbarer Epimorphismus von $W(a)$ auf $W(a_1)$.

Beweis. — Wir können wegen (5.3) für unsere Zwecke $a_1 = I^r$ setzen. Zunächst ist sicherlich f anordnungserhal-

tend, da die offenen Wurzeln die kleinsten mit festem Träger sind. Ist $X \subset I^r$ ein geeigneter Wurzelträger, so gibt es wegen (5.1) auch ein $Y \subset |a|$, $fY = X$, welches Wurzelträger ist. Ist $X \subset I^r$ und erzeugt ein Atom $z \in N(P_r)$ in X, so erzeugt jedes $f^{-1}z$ in $|f|^{-1}X$ wegen unserer Konstruktion. Sei also jetzt $\mathfrak{w} \in W(I^r) - OW(I^r)$ eine Wurzel, so nehmen wir ein $X \subset |a|$, mit $fX = |\mathfrak{w}|_A$ und konstruieren die folgende Wurzel $\mathfrak{v} \in W(a)$: Wir nehmen alle $z \in N(a)$, $(z) \supseteq f^{-1}\mathfrak{w} = \{b \mid |f||b| \in \mathfrak{v}\}$ und bilden $\mathfrak{v} = \cap (z)$. Ist $\mathfrak{v} \in W(a) - OW(a)$, so ist $f\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$.

Wir müssen zeigen, daß man $\mathfrak{v}$ so bestimmen kann, daß $\mathfrak{v} \in W(a) - OW(a)$ ist. Ist $\mathfrak{v}$ offen, so behaupten wir, daß man immer aus jedem hinreichend kleinen $b \in \mathfrak{w}$ mindestens einen Punkt x fortlassen kann, sodaß $|f||b| = |f|(|b| - x)$ ist. Ist das gezeigt, so wäre diese Wurzel $\mathfrak{v}_1$ gefunden, sodaß $f\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}_1 \in W(a) - OW(a)$ ist. Wir nehmen also an, daß das nicht der Fall ist, was besagt, daß die Abbildung $|f|$ auf allen hinreichend kleinen $|b| \in \mathfrak{v}$ eineindeutig ist. Da $\mathfrak{w}$ nicht offen war, ist für alle $c \in \mathfrak{w}$, die hinreichend klein sind, jeder Punkt x von $|\mathfrak{w}|_A$ Randpunkt von $|c|$. Es gibt nun nur einen Urbildpunkt y mit $|f|y = x$, $y \in |\mathfrak{v}|_A$. Nun ist aber $\mathfrak{v}$ offen, d.h. y ist kein Randpunkt in y. Man kann jetzt leicht für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Abbildung g finden, $\varphi(|f|, g) < \varepsilon$, sodaß eine offene Menge U in I^r mit $x \in U$ vom Bild von einer Umgebung V von y freibleibt. Wählte man V so, was ohne Weiteres möglich ist, daß $|f|\,V$ wesentlich war, so ist das also ein Widerspruch. Also ist f ein Epimorphismus. Wegen (3.1) und unserer Definition von f ist f dualisierbar. Damit ist (5.7) und der folgende Satz bewiesen:

Satz 5.1. — *Ist* $t_{P_r^i}$ *eine* (T) *Topologie* (s. 1.2), *so ist*:

$$P_r^i = D_r.$$

Wir müssen nur noch etwas über das Axiom (2a) in Definition 3.1 a sagen:

Ist $|a| = |I^r| = |a_1|$, so kann man natürlich für f die Identität nehmen, da in I^r, wie bereits mehrfach erwähnt, jede r-dimensionale Teilmenge X eine offene (rel. I^r) enthält.

Offenbar ist die Forderung bezüglich der Topologie $t_{P_r^i}$ nötig, um auf D^r zu stoßen. Anderenfalls würde man zwar topologische Räume $a \in P_r^{i'}$ vorfinden, deren Punkte im R^n liegen, deren Topologien aber von der Topologie t_{P_r} verschieden sind.

P. S. Alexandroff hat bemerkt, daß dieser Satz Anlaß zu einem axiomatischen Aufbau der Dimensionstheorie geben könnte. Wir wollen hier auf diese Frage nicht näher eingehen, sondern sie an anderer Stelle ausführlich behandeln.

6. **Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.** — Unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit V^r verstehen wir im Folgenden eine stetig differenzierbar in den R^n eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension r. Zu jedem $x \in V^r$ gibt es also eine eindeutig bestimmte Tangentialebene E^r_x, die stetig mit x variiert. In der Einleitung wurden die Atome in M_r definiert. Wir beziehen uns auf diese Definition. In diesem Abschnitt wird der vorläufige Schlußstein auf unser Gebäude gesetzt und der Satz 6.1 bewiesen:

Satz 6.1. — *Es ist*

$$M_r = P^p_r. \tag{1}$$

Der Bereich der Wurzelträger ist atomar, die Atome sind die Punkte des R^n. Im Folgenden haben wir Abbildungen

$$f\colon\ K(w_0) \to K(w_1)$$

zu untersuchen, wo $w_1 \in OW(P_r)$ und $w_0 \in OW(P^p_r)$ oder aus $OW(M_r)$ ist. Wir können immer w_1 als eine offene Wurzel annehmen die, einen Punkt $x \in R^n$ zum Träger hat, denn zu jedem w_1 gibt es ein w'_1 mit $w_1 \leqslant w'_1$ und $|w'_1|_A = x$. Ebenso gibt es in w_0 eine Wurzel $w'_0 \geqslant w_0$, $|w'_0| = y \in R^n$, sodaß wir uns immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf offene Wurzeln w_0, w_1 beschränken können, die Punkte zum Träger haben.

Wir beweisen (1) in zwei Teilen. Zunächst zeigen wir

$$P^p_r \supseteq M_r. \tag{2}$$

Sind also $w_0 \in OW(M_r)$, $w_1 \in OW(P_r)$ zwei Wurzeln mit Punkten als Träger, dann müssen wir einen Epimorphismus

$$f\colon\ K(w_0) \to K(w_1)$$

finden, der dualisierbar ist. Wir nehmen zunächst

$$|w_0|_A = |w_1|_A = x$$

an. Wegen der Homogenität des R^n kann man diese Annahme offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit machen.

Ist I^r ein Würfel mit Zentrum x, so betrachten wir alle Mannigfaltigkeiten V^r und bezeichnen sie mit (I^r, x), die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Ist $V^r \in (I^r, x)$, so hat V^r die von I^r aufgespannte Ebene E^r_x zur Tangentialebene an der Stelle x.

(2) Die senkrechte Parallelprojektion p_V von V^r in E^r_x ist eine topologische Abbildung in I^r.

Jede Mannigfaltigkeit, die (1) erfüllt, enthält eine Mannigfaltigkeit, die (2) erfüllt. Ist $V^r_i \in (I^r_i, x)$ $(i = 1,2)$, so kann es durchaus ein $W \in M'_r$, $W \leqslant V^r_1 \cap V^r_2$ geben. Wir bemerken, daß es zu diesem W eine Abbildung $p_1 = p_{V_1}$ und eine Abbildung $p_2 = p_{V_2}$ in I^r_1 *bzw.* I^r_2 gibt. Liegt W in einem $V \in (I^r, x)$ und ist ein Atom $z \in N(M_r)$, $|z| = x$, $z < W$ vorhanden, dann gibt es nur ein solches V, denn die Tangentialebene an W im Punkte x ist eindeutig bestimmt.

Sei jetzt $\varkappa \in K(w_0)$. Wir zerlegen den Träger in soviele W mit der zuletzt genannten Eigenschaft, wie es gibt und bilden die entsprechenden p_V. Ist in U kein Atom z, $|z| = x$ vorhanden, so kann es mehrere $W \supseteq U$ geben, die es enthalten und dementsprechend wird U in mehrere I^r abgebildet. Ist ein $|a| \leqslant |\varkappa|_A$ und $a \in P'_r$, so bilden wir den Teil a überhaupt nicht ab, sondern lassen ihn fest. Da die Abbildung von $|\varkappa|_A$, die wir so erklärt haben, im Kleinen topologisch ist, werden Wurzeln in $|\varkappa|_A$ auch eindeutig in Wurzeln abgebildet und wir bekommen im Ganzen eine Abbildung von $\varkappa$ auf eine Kowurzel ν in (w_1). Hat $\varkappa$ einen Träger, der eine offene Menge im R^n enthält, so ist offenbar dasselbe für $\nu = f\varkappa$ richtig. Ist also $\varkappa$ irgend eine Kowurzel in $K(w_0)$, so finden wir eine Kowurzel $\varkappa_1 \geqslant \varkappa$ mit offenem Träger und es wird durch f^{-1}:

$$\widehat{f(\varkappa_1)} = \{\gamma | \gamma \leqslant f(\varkappa_1),\ \gamma \in fK(w_1)\}$$

in $\hat{\varkappa}_1$ abgebildet. Da f^{-1} ein Monomorphismus ist, ist

(6.1) f dualisierbar.

Ist ν irgend eine Kowurzel in $K(w_1)$, so nehmen wir zu jedem $X \leqslant |\nu|_A$, welches in einem I^r liegt, eine Mannigfaltigkeit $V^r_2 \in (I^r, x)$ und das Urbild $p_V^{-1}X$. Diejenigen Teile von $|\nu|_A$, die zu keinem solchen V gehören, lassen wir fort. Mann kann

natürlich auch $V^r = I^r$ setzen. Dadurch bekommen wir ein Urbild von ν heraus, welches, da diese Umkehrabbildung im Kleinen topologisch ist, eine Kowurzel ν wird mit $f\nu = \varkappa$, also:

6.2 Es ist f eine epimorphe Abbildung.

Sind $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zwei Kowurzeln in $K(\mathfrak{w}_0)$ und $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2$, dann ist natürlich auch $f\varkappa_1 \leqslant f\varkappa_2$. Ebenfalls sieht man sofort, daß $|f\varkappa|_A = |f|\,|\varkappa|_A$ ist, wenn man $|f|$ in naheliegenderweise so erklärt, wie wir es oben getan haben. Wir waren ja so vorgegangen, daß wir erst $|f|$ und dann erst f erklärten. Daraus folgt also:

(6.3) Es ist f eine homomorphe Abbildung von $K(\mathfrak{w}_0)$ in $K(\mathfrak{w}_1)$. Die Behauptungen (6.1), (6.2) und (6.3) zusammen liefern:

(6.4) Es ist f eine dualisierbare, epimorphe Abbildung von $K(\mathfrak{w}_0)$ auf $K(\mathfrak{w}_1)$ und infolgedessen

$$P_r^p \supseteq M_r. \tag{2}$$

Jetzt gehen wir dazu über, die Umkehrung zu beweisen.

Wieder ist $\mathfrak{w}_1 \in OW(P_r)$, $|\mathfrak{w}_1|_A \in R^n$, $\mathfrak{w}_0$ ist aber jetzt in $OW(P_r^p)$ und $|\mathfrak{w}_0|_A \in R^n$. Es werden von dem offenen Atom $\mathfrak{w}_0$ in der nicht normalisierten Struktur $N_A^{-1}P_r^p$ unter anderem auch die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, also vor allem die Würfel I^r mit Zentren $x = |\mathfrak{w}_0|_A$ erzeugt. Wir setzen voraus, es gäbe einen dualisierbaren Epimorphismus

$$f\colon K(\mathfrak{w}_0) \to K(\mathfrak{w}_1).$$

Aus der Dualisierbarkeit von f folgt, daß die offenen Kowurzeln in $K(\mathfrak{w}_1)$ monomorph in gewisse offene Kowurzeln von $K(\mathfrak{w}_0)$ abgebildet werden. Den offenen Kowurzeln entsprechen aber die Elemente von P_r' *bzw.* $P_r^{p'}$. Sei also φ ein solcher Monomorphismus, der f dualisiert und einen Würfel I^r in ein Element $a \in P_r^{p'}$ abbildet. Da φ eineindeutig und, wie man sich leicht überlegt, auch beiderseitig stetig ist, ist in jedem $a \in P_r^{p'}$ eine topologische Mannigfaltigkeit enthalten. Also ist $P_r^{p'}$ sicher in der Struktur T_r aller r-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten im R^n enthalten. Es ist

$$P_r \subset M_r \subset P_r^p \subset T_r.$$

Wir zeigen jetzt, daß diese Mannigfaltigkeiten sogar diffe-

renzierbar sind. Wir wollen hier noch einmal auf den Beweis (6.4) zurückgreifen. Die Abbildung f vermittelt natürlich insbesonders eine Abbildung

$$f : \{z \,|\, |z| = |w_0|_A\} \to \{z_1 \,|\, |z_1| = |w_1|_A\}.$$

Im Falle von (6.4) war $|w_0|_A = |w_1| = x \in R^n$ und wir können das Ideal

$$D = D(z_1) = \bigcap_{fz = z_1} (z)$$

betrachten. Die fragliche Abbildung f wird auf den Atomen einfach durch die entsprechenden Ideale erklärt. Wir haben sie in der Einleitung schon erwähnt. Dieses Ideal D hat nun die folgenden Eigenschaften:

(D1) Ist $z_2 \in N(P_r)$, $(z_2) \supseteq D$, dann ist $z_1 = z_2$.

(D2) Das Ideal D wird von Elementen a erzeugt, deren Träger offen rel. x ist (d.h. es ist $|\bar{a}| - x$ offen).

(D3) Es ist D minimal mit den Eigenschaften (1) und (2).

Diese Eigenschaften sind offensichtlich alle erfüllt. Wir interessieren uns sehr viel mehr dafür, daß diese Eigenschaften sogar $D(z_1)$ eindeutig bestimmen, denn man kann leicht eine Konstruktionsvorschrift für $D(z_1)$ angeben und durch Durchschnittsbildung aller Ideale, die (D1) und (D2) erfüllen, die Eindeutigkeit von $D(z_1)$ beweisen. Diese Konstruktionsvorschrift lautet so, daß wir für die erzeugenden Elemente, die in (D2) genannt werden, rel. x offene Elemente nehmen, die die Vereinigunsgmenge von lauter Elementen $a \in P_r'$ sind, zu denen es ein Atom $z_2 < a$, $|z_2| = x$ gibt und ein I^r mit $a \subset I^r$.

Ist nun $z_2 \in N(T_r)$ und $(z_2) \supseteq D(z_1)$, dann ist jede Mannigfaltigkeit $V \in T_r'$ (also jede nicht notwendig differenzierbare, aber topologische r-dimensionale Mannigfaltigkeit) an der Stelle x differenzierbar. Auf die stetige Differenzierbarkeit werden wir noch näher eingehen.

Wir behandeln zunächst den Spezialfall, daß f auf den offenen Wurzeln von $K(P_r)$ die Identität ist und daß infolgedessen $|w_0|_A = |w_1|_A = x$ ist, also die Dinge so liegen wie bei der Abbildung f aus (6.3).

Entsprechend zu unserem $D(z_1)$ gibt es jetzt auch ein Ideal $D'(z_1)$, welches so erklärt ist, daß jetzt alle $z \in N(P_r^p)$ zur

Konkurrenz zugelassen werden. Es ist $D'(z_1) \leqslant D(z_1)$. Könnten wir zeigen, daß immer

(3) $$D'(z_1) = D(z_1)$$

ist, so wäre wegen obiger Überlegung dieser Spezialfall erledigt.

Es ist (3) bewiessen, wenn wir die obigen drei Eigenschaften für D' nachgewiesen haben:

Zu (D1): Wäre $z_2 \in N(P_r)$, $(z_2) \supseteq D'(z_1)$, dann wäre $f(z_2) = z_1$ und da f auf P_r konstant ist, $z_1 = z_2$.

Zu (D2): Wäre (D2) nicht erfüllt, so gibt es ein Erzeugendensystem $\{a_i \vee b_i\}$, wobei $\{a_i\}$ das in (D2) genannte Erzeugendensystem von $D(z_1)$ ist. Da jedes $a_i \vee b_i$ Träger einer Kowurzel in P_r ist, muß $b_i \in P'_r$ sein, d.h., es kann nur ein $z < b_i$ für alle b_i geben, nämlich $z = z_1$. Daraus folgt, daß $b_i \leqslant a_i$ und $a_i \vee b_i = a_i$ ist.

Zu (D3): Das Axiom (D3) ist für $D'(z_1)$ erfüllt, da es bereits für das größere $D(z_1)$ erfüllt war.

Da mit ist (3) bewiesen.

Um diesen Spezialfall, den wir bereits bewiesen haben, auf den allgemeinen Fall zu erweitern, benutzen wir Definition 3.1 *b* (2*b*): Da $|w_0|_A$, $|w_1|_A$ beides Punkte sind, sind ihre Träger isomorph. Zu w_0 gibt es eine Wurzel $w'_0 \in OW(P_r)$, die den Träger $|w_0|_A$ hat und die zu w_1 isomorph ist. Durch f wird dieses w'_0 auf w_1 isomorph abgebildet. Durch f wird also eine topologische Abbildung des R^n auf sich vermittelt, bei welcher w'_0 auf w_1, also insbesondere $|w'_0|_A$ auf $|w_1|_A$ abgebildet wird. Damit ist die Möglichkeit gegeben, w'_0 und w_1 zu identifizieren und wir haben den allgemeisten Fall auf den früher behandelten Spezialfall zurückgeführt.

Jetzt haben wir noch die Frage der stetigen Differenzierbarkeit zu behandeln:

Sei V^r eine Mannigfaltigkeit in $P_r^{p'}$ und V_D^r eine in V^r dichte Menge, die nirgends offen ist. Es ist V_D^r Träger einer Wurzel $v \in OW(P_r^p)$. Wegen Definition 3.1*b* muß es eine Wurzel $w \in OW(P)$ und einen dualisierbaren Epimorphismus $f: K(v) \to K(w)$ geben. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $v \in [OW(P_r^p)]$ ist. Man kann eine polyedrale Mannigfaltigkeit $W^r \in P'_r$ finden, die zu V^r topologisch äquivalent ist und eine Bildmenge $fV_D^r = W_D^r$, die die

gleichen Eigenschaften wie V^r_D in V^r um in W^r hat. Sei $\sigma \subset W^r$ ein Simplex und $x \in V^r_D$, sodaß $y = fx$ innerer Punkt in W^r_D ist. Durch eine Abbildung $\varphi \in Df$ (s. Definition der dualisierbaren Abbildung am Ende von Abschnitt 2) wird σ isomorph auf eine Umgebung $U(x) \subset V^r$ abgebildet. Wegen Definition 3.1*b* (2*b*) ist dieses auf die in D(2) beschriebenen Erzeugendensysteme a festsetzbar. Ist nun in $\{y_i\}$ eine gegen y konvergierende Folge, so betrachten wir zu jedem y_i ein Erzeugendensystem $\{a^i_j\}$ für ein Atom z_i, $|z_i| = y_i$ von $D(z_i)$. Wenn nun eine Folge a_y für festes y gegen ein $a_j \in D(z)$ $(|z|) = y$ konvergiert, so ist für die Bilder unter f dasselbe richtig. Das beweist aber die stetige Differenzierbarkeit von V^r, da damit auch die Tangentialebenen an den Punkten x_i gegen die Tangentialebenen im Punkte x konvergiert.

LITERATUR

[1] F. W. Bauer, Über Fortsetzungen von Homologiestrukturen, *Math. Ann. Bd.*, 135 S. 93-114 (1958).

[2] F. W. Bauer, Spezielle Homologiestrukturen, *Math. Ann. Bd.* 136 S. 348-364 (1958).

[3] W. Hurewicz et H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press (1948).

SUR LES TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES ET KAHLÉRIENNES

par R. COUTY

INTRODUCTION

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines transformations des variétés riemanniennes et des variétés kählériennes, ou plus généralement des variétés munies d'une connexion euclidienne ou linéaire. Sauf avis contraire, il s'agit toujours de variétés différentiables de classe C^∞. Nous faisons constamment usage de la dérivée de Lie dont la définition et les propriétés essentielles sont rappelées dans les préliminaires. Ce travail est divisé en deux parties. La première partie est de caractère local; elle est inspirée par l'étude des espaces harmoniques. Rappelons qu'un espace riemannien est dit harmonique relativement à un point O, si, s, désignant la distance géodésique de O à un point variable M, le laplacien $\Delta_2 s$ ne dépend que de s. On sait [15, 16], que sur un tel espace, l'élément de volume en M est invariant par toute transformation conservant la sphère géodésique de centre O et passant par M. Ceci nous conduit à étudier sur une variété riemannienne quelconque, parmi les transformations locales conservant la sphère géodésique celles qui conservent l'élément de volume, ou plus généralement telle ou telle structure géométrique. Sur une variété V munie d'une connexion linéaire, on peut définir de telles transformations en considérant le paramètre affine des géodésiques; soit T_0 l'espace vectoriel tangent en O, à tout endomorphisme $\mathcal{A}$ de T_0 nous associons la transformation locale $M \rightarrow M' = \mathcal{T}(M)$ définie de la manière suivante : dans un voisinage convenable de O, à

tout point M correspond la géodésique (g) passant par O et M, soit θ son vecteur tangent en O, θ est transformé par $\mathfrak{a}$ en θ', on prend sur la géodésique (g') tangente en O à θ', le point M′ de paramètre canonique s' égal au paramètre canonique s de M. Nous prendrons plus particulièrement pour endomorphismes $\mathfrak{a}$ les éléments du groupe d'holonomie infinitésimale σ'_0 au point au O. Le chapitre I est consacré aux définitions des transformations étudiées et au rappel des propriétés des coordonnées normales et des tenseurs normaux. Dans le chapitre II, V est à connexion riemannienne et on étudie le cas où les transformations $\mathfrak{T}$ sont affines, projectives ou conformes (dans ces deux derniers cas nous sommes amenés à supposer V espace d'Einstein) ou bien conservent l'élément de volume, on en déduit des propriétés de la courbure (espaces localement symétriques, ou espaces dont le tenseur de Ricci est à dérivée covariante nulle). Le chapitre III, étudie, pour les variétés kähleriennes l'invariance de la structure complexe, puis le cas où les transformations $\mathfrak{T}$ sont projectives ou conformes, l'hypothèse, espace d'Einstein n'étant plus nécessaire ici. Le chapitre IV concerne les variétés à connexion euclidienne, nous établissons d'abord quelques formules valables pour une connexion linéaire, puis nous considérons l'exemple d'un espace de groupe semi-simple, où se trouvent réalisées certaines hypothèses que nous sommes amenés à faire par la suite. Pour une variété riemannienne munie d'une connexion euclidienne, nous obtenons moyennant des hypothèses sur la torsion, des résultats analogues à ceux du chapitre III.

La deuxième partie est essentiellement l'étude des transformations infinitésimales projectives ou conformes sur une variété riemannienne ou kählérienne. Dans le chapitre I, la variété est supposée compacte, ou plus généralement complète. Dans le cas compact, nous obtenons une relation entre le signe de la courbure de Ricci et l'existence de transformations infinitésimales projectives. Dans le cas complet nous retrouvons un résultat de HANO [6]; et, si la variété riemannienne complète est simplement connexe, nous obtenons pour les transformations projectives et pour les collineations conformes, un théorème de décomposition analogue à celui du cas affine. Le chapitre se termine par une étude des endomorphismes [10, 20]

associés à une transformation infinitésimale affine, projective ou conforme. Au chapitre II nous montrons que certains des résultats de BOCHNER, LICHNEROWICZ, YANO [27, 16] pour les tenseurs d'un espace riemannien compact, orientable, sont valables pour les tenseurs G-invariants d'un espace homogène G/H, ce qui nous permet en particulier d'énoncer un théorème de semi-simplicité. Nous étudions ensuite le cas particulier où l'espace des classes de cohomologie des n-formes G-invariantes et de dimension 1, nous obtenons dans ce cas pour les p-formes conformes G-invariantes des résultats analogues à ceux obtenues pour les p-formes dans le cas compact. Le chapitre III est réservé au cas où V est espace d'Einstein, l'espace vectoriel des 1-formes projectives (resp conformes) admet une décomposition en somme directe analogue à celle donnée par LICHNEROWICZ [18] pour les formes conformes dans le cas compact. Si V est de plus harmonique, ou homogène, toute 1-forme projective (resp conforme) est isométrique; il en est de même, sous certaines hypothèses si V est complet. Le chapitre IV est l'étude, dans le cas où V est une variété kählerienne des 1-formes projectives (resp conformes) fermées, elles sont alors affines (resp homothétiques), si on ajoute l'hypothèse compact, ou complet, avec une restriction sur le groupe d'holonomie, on a des formes à dérivée covariante nulle. Pour un espace d'Einstein-Kähler on obtient un résultat qui a été donné par YANO [26] seulement dans le cas compact. Certains des résultats de ce travail ont été indiqués dans quatre notes aux comptes rendus de l'Académie des Sciences [3, 4, 5].

Je suis heureux d'exprimer ma profonde reconnaissance à M. ANDRÉ LICHNEROWICZ, qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils et encouragements avec la plus grande bienveillance et dont l'enseignement et l'œuvre, en particulier ses deux récents ouvrages [12, 13] ont été pour moi le guide le plus précieux. Que M. CHARLES EHRESMANN, dont j'ai eu le bonheur de suivre les leçons et qui a bien voulu me proposer un sujet de seconde thèse veuille bien trouver ici l'expression de mes remerciements. Je remercie également Mme JACQUELINE LELONG-FERRAND qui a bien voulu se joindre à MM. EHRESMANN et LICHNEROWICZ pour constituer le jury auquel est soumis cette thèse.

PRÉLIMINAIRES

§ 1. — Dérivée de Lie ([13] pages 12-32).

Soit Vn une variété différentiable de dimension n, de classe C^∞; soit φ_t une famille dépendant du paramètre $t \in R$ de transformations différentiables de Vn, nous dirons que nous avons un groupe à un paramètre de transformations différentiables si l'application :

$$(t, x) \in R \times V_n \to \varphi_t(x) = x(t) \in V_n,$$

est une application différentiable de $R \times Vn$ dans Vn et si de plus, pour t et $t' \in R$

$$\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}.$$

Un groupe à un paramètre de transformations différentiables définit sur Vn un champ de vecteurs ξ de la manière suivante : pour $x \in Vn$

$$\xi_x = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0}.$$

Réciproquement, si on considère un champ de vecteurs ξ, il n'existe pas nécessairement de groupe à un paramètre de transformations différentiables définissant ce champ de vecteurs, mais, ce champ de vecteurs définit un groupe local à un paramètre de transformations locales de Vn. En effet, il suffit d'intégrer, à partir du point initial $x(0) = x$ le système diférentiel

$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi_{x(t)}; \tag{1-1}$$

on sait que, pour tout $y \in Vn$, il est possible de trouver un

voisinage $U(y)$ et un nombre positif $\varepsilon(y)$ tels que (1-1) admette une solution notée

$$x(t) = \exp(t\xi)\, x \qquad \text{pour} \qquad |t| < \varepsilon(y).$$

L'application différentiable $\exp(t\xi)$ admet une application linéaire tangente que nous noterons de la même façon et qui définit un isomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x sur l'espace vectoriel $T_{x(t)}$ tangent en $x(t) = \exp(t\xi)x$. Par image réciproque, on a un isomorphisme $\exp(t\xi)^*$ de l'espace des formes en $x(t)$ sur l'espace des formes en x. Si Ω est une p-forme, la dérivée de Lie de Ω par ξ est la p-forme définie par

$$[\mathfrak{L}(\xi)\Omega]_x = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\xi)^*\, \Omega_{x(t)} - \Omega_x}{t}$$

D'une manière analogue, $\exp(-t\xi)$ définit un isomorphisme de $T_{x(t)}$ sur T_x et par suite un isomorphisme de l'espace des tenseurs de type donné en $x(t)$ sur l'espace des tenseurs de même type en x. Si $\mathfrak{T}$ est un tenseur, la dérivée de Lie de $\mathfrak{T}$ par ξ sera le tenseur défini par

$$[\mathfrak{L}(\xi)\mathfrak{T}]_x = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(-t\xi)\mathfrak{T}_{x(t)} - \mathfrak{T}_x}{t}.$$

Il est commode dans les calculs d'introduire une connexion linéaire ([12] p. 72-107) γ définie par une forme ω. Dans un système de coordonnées locales quelconques désignons par E^i_{jk} les coefficients de cette connexion; soit $\bar{\gamma}$ la connexion associée définie par

$$\bar{E}^i_{jk} = E^i_{kj},$$

nous désignerons par ∇ et $\bar{\nabla}$ les opérateurs de dérivation covariante relativement à ces deux connexions. La dérivée de Lie de la connexion (γ) est donnée par

$$(1\text{-}2) \qquad [\mathfrak{T}(\xi)E]^i_{jk} = \nabla_k\bar{\nabla}_j\xi_i + \xi^r R^i_{jrk}$$

(où R^i_{jrk} est le tenseur de courbure de la connexion (γ)). Pour un tenseur $\mathfrak{T}^j_i$, une fois covariant et une fois contravariant, on a

$$(1\text{-}3) \qquad [\mathfrak{L}(\xi)\mathfrak{T}]^j_i = \xi^k\nabla_k\mathfrak{T}^j_i + \mathfrak{T}^j_r\bar{\nabla}_i\xi^r - \mathfrak{T}^r_i\bar{\nabla}_r\xi^j.$$

On en déduit immédiatement la formule analogue pour un tenseur quelconque. Rappelons enfin la relation de commutation des opérateurs $\mathfrak{L}$ et ∇, par exemple, pour un tenseur $\mathfrak{G}^j{}_i$

$$(1\text{-}4) \qquad \mathfrak{L}(\xi)\nabla_k\mathfrak{G}^j{}_i - \nabla_k\mathfrak{L}(\xi)\mathfrak{G}^j{}_i = [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^j_{pk}\mathfrak{G}^p{}_i - [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^p_{ik}\mathfrak{G}^j{}_p$$

§ 2. — Transformations projectives et conformes (voir par exemple, [26]).

Un vecteur (ξ^i) définissant une transformation infinitésimale affine, projective, conforme, homothétique, isométrique, sera dit plus brièvement vecteur affine, projectif, etc..., et sur une variété riemannienne, grâce à la dualité définie par la métrique, la 1-forme associée dont l'expression locale est $\xi_i dx^i$ sera appelée 1-forme affine, projective, etc... Rappelons qu'une transformation affine pour une connexion linéaire donnée est une transformation conservant cette connexion. Si ξ est un vecteur affine, on a

$$(2\text{-}1) \qquad [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^i_{jk} = 0.$$

Une transformation projective est une transformation conservant les géodésiques. Pour une connexion symétrique, si ξ est un vecteur projectif, il existe un vecteur ψ, tel que

$$(2\text{-}2) \qquad [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^i_{jk} = \delta^i_j\psi_k - \delta^i_k\psi_j$$

Dans le cas d'une variété riemannienne, on voit par contraction de i et j que ψ est le vecteur gradient défini par

$$(2\text{-}3) \qquad \psi_l = \nabla_l\nabla^p\xi_p, \qquad \text{ou} \qquad \psi = -\frac{1}{n+1}d\delta\xi,$$

donc un vecteur projectif vérifiant $d\delta\xi = 0$, (où d et δ sont les opérateurs de différentiation et de co-différentiation de G. de Rham [1]), est affine.

Dans le cas d'une connexion symétrique de coefficients Γ^i_{jk} de

$$\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{R}^i{}_{jkl} = \nabla_l[\mathfrak{L}(\xi)\Gamma]^i_{jk} - \nabla_k[\mathfrak{L}(\xi)\Gamma]^i_{jl} \quad ([26] \text{ p. } 17)$$

et de (2-2); on déduit

$$\mathfrak{L}(\xi)R^i_{jkl} = \delta^i_k \nabla_l \psi_j - \delta^i_l \nabla_k \psi_j \tag{2-4}$$

et, par contraction de i et l

$$\mathfrak{L}(\xi)R_{jk} = (1 - n)\nabla_k \psi_j. \tag{2-5}$$

Si nous considérons maintenant le tenseur de courbure projectif qui, pour un espace de Riemann est donné par

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_l R_{jk} - \delta^i_k R_{jl}),$$

on a, pour tout vecteur projectif ξ

$$\mathfrak{L}(\xi)W^i_{jkl} = 0.$$

Sur un espace de Riemann de métrique :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

une transformation conforme est une transformation préservant la métrique à un facteur scalaire près; si ξ est un vecteur conforme, on a

$$\mathfrak{L}(\xi)g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 2\Phi g_{ij} \tag{2-7}$$

où Φ est une fonction dont l'expression est déduite de (2-7) par contraction

$$\Phi = \frac{1}{n}(\nabla_p \xi^p) = -\frac{1}{n}\delta\xi.$$

Si Φ est constante, la transformation est une homothétie, et si $\delta\xi = 0$, le vecteur conforme est isométrique.

Φ_i désignant le vecteur gradient

$$\Phi_i = \partial_i \Phi$$

$\left(\text{où } \partial_i\Phi \text{ est une notation abrégée pour } \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right)$

on a ([26] p. 160)

$$(\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_j \Phi_k + \delta^i_k \Phi_j - g_{jk}\Phi^i \tag{2-9}$$

d'où

$$\mathfrak{L}(\xi)R^i_{jkl} = -\nabla_k \Phi_j \delta^i_l + \nabla_l \Phi_j \delta^i_k - g_{jk}\nabla_l \Phi^i + g_{jl}\nabla_k \Phi^i \tag{2-10}$$

et

$$\mathfrak{L}(\xi)R_{ij} = -(n-2)\nabla_j\Phi_i - g_{ij}\nabla_p\Phi^p. \tag{2-11}$$

Considérons le tenseur de courbure conforme donné par

$$C^h{}_{ijk} = R^h{}_{ijk} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h{}_j - g_{ij}R^h{}_k)$$
$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}),$$

pour tout vecteur conforme ξ

$$\mathfrak{L}(\xi)C^h{}_{ijk} = 0.$$

PREMIÈRE PARTIE

Transformations locales définies par l'holonomie infinitésimale.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS

§ 3. — Coordonnées normales et tenseurs normaux.

Soit Vn un espace riemannien; dans cette première partie nous ferons fréquemment usage des coordonnées normales ([25], p. 84). Nous rappelons que, pour définir un système de coordonnées normales d'origine O, on mène les différentes géodésiques issues de O, θ^i $(i = 1, 2 \ldots n)$ désignant les composantes par rapport à un repère quelconque d'origine O du vecteur unitaire tangent en O à la géodésique OM, les coordonnées normales du point M sont :

$$x^i = \theta^i s$$

où s est la longueur de l'arc de géodésique OM. Dans ce paragraphe les coordonnées locales employées sont les coordonnées normales. Γ^i_{jk} désignant les coefficients de la connexion riemannienne, on a, au point M

$$\Gamma^i_{jk} x^j x^k = 0$$

et à l'origine O

$$(\Gamma^i_{jk})_0 = 0$$

rappelons encore la relation :

$$s^2 = (g_{ij})_0 x^i x^j.$$

Considérons maintenant les dérivées en O des coefficients Γ^i_{jk}

$$(A^i_{jkl})_0 = (\partial_l \Gamma^i_{jk})_0, \qquad \ldots, \qquad (A^i_{jkl\ldots r})_0 = (\partial_{l\ldots r}\Gamma^i_{jk})_0.$$

Si on rapporte l'espace à des coordonnées normales d'origine M variable, on définit des ensembles de fonctions des coordonnées de M. On sait que ces fonctions sont les composantes de tenseurs, au tenseur $A^i_{jkl\ldots r}$ *à* $_{p+2}$ indices on donne le nom de tenseur normal d'ordre p ([25] p. 102). Nous aurons besoin dans la suite des composantes des tenseurs normaux d'ordre 2 et 3 calculées en fonction des composantes du tenseur de courbure. Nous suivrons pour cela la méthode indiquée par Elie-Cartan ([2], p. 243). Au point O nous attachons un repère R_0 et en tout point M d'un voisinage convenable de O le repère déduit de R_0 par transport par parallélisme, le long de la géodésique OM. Nous désignerons par θ^i et ω^i_j les formes qui définissent le déplacement de ce repère, elles s'écrivent en posant $x^i = a^i t$, les a^i restant constants le long d'une géodésique issue de O

$$\text{(3-1)} \qquad \begin{cases} \theta^i = a^i\,dt + \theta'^i(t,\ a,\ da) \\ \omega^i_j = \omega'^i_j(t,\ a,\ da) \end{cases}$$

où les θ'^i, ω'^i_j sont de la forme

$$\begin{cases} \theta'^i = \alpha^i_j(t,\ a)\,da^j \\ \omega'^i_j = \gamma^i_{jk}(t,\ a)\,da^k. \end{cases}$$

Partons des équations de structure

$$\text{(3-2)} \qquad \begin{cases} d\theta^i = \omega^i_r \wedge \theta^r \\ d\omega^i_j = -\,\omega^i_r \wedge \omega^r_j + \dfrac{1}{2}\,R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l. \end{cases}$$

Remplaçons θ^i et ω^i_j par leurs expressions (3-1), on obtient

$$\text{(3-3)} \qquad \begin{cases} \partial_t\theta'^i = da^i + a^l\omega'^i_l \\ \partial_t\omega'^i_j = R^i_{jkl}a^l\theta'^k. \end{cases}$$

On en déduit un développement limité de θ'^i et ω'^i_j suivant les puissances de t, et, en revenant aux formes θ^i et ω^i_j et aux coordonnées normales, on a :

$$\text{(3-4)} \qquad \begin{cases} \theta^i = dx^i + \dfrac{1}{6}\,(R^i_{lkr})_0\,x^l x^k\,dx^r + \dfrac{1}{12}(\nabla_s R^i_{lkr})_0\,x^l x^r x^s\,dx^k \\ \omega^i_j = \dfrac{1}{2}\,(R^i_{jkl})_0\,x^l\,dx^k + \dfrac{1}{3}\,(\nabla_r R^i_{jkl})_0\,x^l x^r\,dx^k. \end{cases}$$

En repassant au repère naturel relatif aux coordonnées normales d'origine O, il en résulte, en utilisant l'identité de Bianchi, le développement de Γ^i_{jk}

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{3}[R^i_{jkl} + R^i_{kjl}]_0 x^l + \frac{1}{12}[4\nabla_r R^i_{jkl} + \nabla_r R^i_{kjl} + \nabla_k R^i_{ljr} + \nabla_l R^i_{jrk}]_0 x^l x^r,$$

d'où les composantes des tenseurs normaux

$$(3\text{-}5) \qquad A^i_{jku} = \frac{1}{3}(R^i_{jku} + R^i_{kju}),$$

$$(3\text{-}6) \qquad A^i_{jkuv} = \frac{1}{12}[(\nabla_j R_{kuiv} + \nabla_j R_{kviu}) - 2(\nabla_v R_{jiku} + \nabla_u R_{jikv}) - 3(\nabla_v R_{juki} + \nabla_u R_{jvki})]$$

et, par contraction

$$(3\text{-}7) \qquad A^i_{iku} = -\frac{1}{3}R_{ku},$$

$$(3\text{-}8) \qquad A^i_{ikuv} = -\frac{1}{6}(\nabla_v R_{ku} + \nabla_k R_{uv} + \nabla_u R_{vk}).$$

§ 4. — Définition des transformations étudiées.

Sur une variété différentiable Vn munie d'une connexion linéaire considérons un champ de tenseurs $A^i_{ji_1 \ldots i_p}$; les tenseurs en un point O

$$(A^i_{ji_1 \ldots i_p} V_1^{i_1} \ldots V_p^{i_p})_0, \ \ldots, \ (\nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_r} A^i_{ji_1 \ldots i_p} V_1^{i_1} \ldots V_p^{i_p} U_1^{j_1} \ldots U_r^{j_r})_0,$$

où $V_1, \ldots V_r$; $U_1, \ldots U_r$; sont des vecteurs de l'espace vectoriel T_0 tangent en O, définissent des endomorphismes de T_0. Nous noterons en abrégé ces différents tenseurs par $\overset{0}{\alpha}{}^i_j, \ldots, \overset{r}{\alpha}{}^i_j$, et les endomorphismes correspondants par $\overset{0}{\alpha}, \ldots, \overset{r}{\alpha}$; l'indice r indiquant « l'ordre » de l'élément considéré sera supprimé lorsqu'il n'y aura pas lieu de préciser cet ordre. Si nous prenons pour A le tenseur de courbure, les tenseurs en O introduits ci-dessus que nous noterons $\overset{0}{\Omega}{}^i_j, \ldots, \overset{r}{\Omega}{}^i_j$ engendrent l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie infinitésimale en O ([12], p. 133, [22]). A tout endomorphisme α correspond un groupe à un paramètre d'automorphismes de T_0, exp $(u\alpha)$, à un tel automorphisme, transformant le vecteur Θ en le vec-

teur θ', nous associons la transformation locale suivante : dans un voisinage convenable de O, à tout point M correspond la géodésique g passant par O et M, soit θ le vecteur tangent en O à (g), on prend sur la géodésique (g') tangente en O à θ' le point M′ de paramètre canonique s' égal au paramètre canonique s de M. Si (x^i) sont les coordonnées normales de M dans un système de coordonnées normales d'origine O, ces transformations sont définie par le vecteur ξ dont les composantes en coordonnées normales d'origine O sont données par

$$\xi^i = (\mathfrak{a}^i{}_u)_0 x^u. \tag{4-1}$$

Nous désignerons par $\overset{0}{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{a}}, \ldots \overset{p}{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{a}}$ les transformations locales sur V ainsi associées au tenseur $\mathfrak{a}$. Nous allons plus particulièrement étudier les transformations $\mathfrak{T}_R$ associées au tenseur de courbure R.

CHAPITRE II

TRANSFORMATIONS $\mathcal{T}_R$ SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

§ 5. — Cas où les transformations $\mathcal{T}_R$ sont affines.

Soit V une variété riemannienne, ξ étant le vecteur défini en coordonnées normales d'origine O par (4-1) on a, dans ce système de coordonnées

$$\partial_j \xi^i = (\alpha^i{}_j)_0, \ldots, \partial_{jk} \ldots \xi^i = 0,$$
$$(\nabla_j \xi^i)_0 = (\partial_j \xi^i)_0 = (\alpha^i{}_j)_0, \qquad (\partial_k \nabla_j \xi^i)_0 = 0$$

et

$$\text{(5-1)} \quad \mathcal{L}(\xi) g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = g_{il}(\alpha^l{}_j)_0 + g_{jl}(\alpha^l{}_i)_0 + \partial_h g_{ij} (\alpha^h{}_u)_0 x^u.$$

Nous désignerons par H le tenseur introduit par Elie Cartan et défini par

$$H_{ijklmn} = \nabla_m \nabla_n R_{ijkl} - \nabla_n \nabla_m R_{ijkl}.$$

Nous appellerons espace (H) tout espace riemannien pour lequel ce tenseur est nul [1].

Nous allons étudier les espaces V pour lesquels les transformations $\mathcal{T}_R$ associées à un point quelconque O sont affines; on en déduit d'ailleurs immédiatement qu'elles sont isométriques; en effet, d'après (1-4), pour un vecteur affine ξ les opérateurs $\mathcal{L}$ et ∇ commutent, on a donc

$$\nabla \mathcal{L}(\xi) g_{ij} = \mathcal{L}(\xi) \nabla g_{ij} = 0$$

d'autre part d'après (5-1)

$$(\mathcal{L}(\xi) g_{ij})_0 = (\Omega_{ij} + \Omega_{ji})_0 = 0,$$

[1] On sait [17] que si l'espace est de plus espace d'Einstein compact orientable, il est localement symétrique.

donc
$$\mathfrak{L}(\xi) g_{ij} = 0.$$

Les transformations $\mathfrak{T}$ étant affines

$$\mathfrak{L}(\xi) R^i_{jkl} = \xi^q \nabla_q R^i_{jkl} - \nabla_q \xi^i R^q_{jkl} + \nabla_j \xi^q R^i_{qkl} + \nabla_k \xi^q R^i_{jql} + \nabla_l \xi^q R^i_{jkq} = 0$$

ce qui entraîne

$$(\mathfrak{L}(\xi) R^i_{jkl})_0 = (\partial_r \mathfrak{L}(\xi) R^i_{jkl})_0 = 0,$$

d'où

$$(R_{qjkl}\Omega^q{}_i + R_{iqkl}\Omega^q{}_j + R_{ijql}\Omega^q{}_k + R^i{}_{jkq}\Omega^q{}_l)_0 = 0,$$
$$(\Omega^q{}_r \nabla_q R^i_{jkl} - \Omega^i{}_q \partial_r R^q_{jkl} + \Omega^q{}_j \partial_r R^i_{qkl} + \Omega^q{}_k \partial_r R^i_{jql} + \Omega^q{}_l \partial_r R^i_{jkq})_0 = 0,$$

on en déduit alors les égalités tensorielles.

$$\text{(5-2)} \qquad R_{qjkl}\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{imn} + R_{iqkl}\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{jmn} + R_{ijql}\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{kmn} + R_{ijkq}\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{lmn} = 0,$$

$$\text{(5-3)} \qquad \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{rmn} \nabla_q R^i_{jkl} + \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{imn} \nabla_r R_{qjkl} + \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{jmn} \nabla_r R_{iqkl} + \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{kmn} \nabla_r R_{ijql} + \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_p} R^q{}_{lmn} \nabla_r R_{ijkq} = 0.$$

Supposons simplement les transformations $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$ affines (5-2) pour $p = 0$, est équivalente à $H = 0$.

Si les transformations $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$ sont affines, par dérivation covariante de (5-2) pour $p = 0$ et, en tenant compte de (5-3) pour $p = 1$, on obtient

$$\nabla_{a_1} R_{qjkl} R^q{}_{imn} + \nabla_{a_1} R_{iqkl} R^q{}_{jmn} + \nabla_{a_1} R_{ijql} R^q{}_{kmn} + \nabla_{a_1} R_{ijkq} R^q{}_{lmn} = 0$$

d'où en utilisant (5-3) pour $p = 0$

$$\text{(5-4)} \qquad R^q{}_{rmn} \nabla_q R^i_{jkl} = 0$$

on en déduit par contraction

$$R^q{}_n \nabla_q R^i_{jkl} = 0$$

et si
$$|R^q{}_n| \neq 0$$
il en résulte
$$\nabla_q R^i_{jkl} = 0.$$

Supposons maintenant les transformations $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$ et $\overset{2}{\mathfrak{T}}_R$ affines; par dérivation covariante de (5-2) pour $p = 1$, et en tenant compte de (5-2) pour $p = 2$, il vient

$$\nabla_a R_{qjkl} \nabla_b R^q{}_{imn} + \nabla_a R_{iqkl} \nabla_b R^q{}_{jmn} + \nabla_a R_{ijql} \nabla_b R^q{}_{kmn} + \nabla_a R_{ijkq} \nabla_b R^q{}_{lmn} = 0,$$

et, en utilisant (5-3) pour $p = 1$

$$\nabla_a R^q{}_{bmn} \nabla_q R^i{}_{jkl} = 0 \tag{5-5}$$

ce qui peut s'écrire, d'après la deuxième identité de Bianchi

$$\nabla_a R^q{}_{bmn} \nabla_k R_{lqij} + \nabla_a R^q{}_{bmn} \nabla_l R_{qkij} = 0 \tag{5-6}$$

d'où, par contraction de b et l, m et i, n et j, a et k

$$\nabla^k R^{qlij} \nabla_k R_{lqij} + \nabla^k R^{qlij} \nabla_l R_{qkij} = 0 \tag{5-7}$$

mais de (5-5) on déduit par contraction de b et k, m et i, n et j, a et l

$$\nabla^l R^{qkij} \nabla_q R_{klij} = 0$$

(5-7) se réduit alors à

$$\nabla^k R^{qlij} \nabla_k R_{qlij} = 0 \tag{5-8}$$

si V est proprement riemannien, il en résulte :

$$\nabla_k R_{qlij} = 0.$$

THÉORÈME. — *Soit* V *un espace riemannien; si les transformations* $\overset{1}{\mathfrak{T}}_{\mathrm{R}}$ *sont affines,* V *est un espace* (H). *Si la courbure de* Ricci *est non dégénérée* (resp. *si* V *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_{\mathrm{R}}, \overset{1}{\mathfrak{T}}_{\mathrm{R}}$ $\left(\textit{resp. } \overset{1}{\mathfrak{T}}_{\mathrm{R}}, \overset{2}{\mathfrak{T}}_{\mathrm{R}}\right)$ *sont affines,* V *est localement symétrique.*

Remarque. — Soit $\alpha^i{}_j$ un tenseur quelconque vérifiant $|\alpha^i{}_j| \neq 0$ par un calcul analogue à celui que nous avons fait, on montre que si un tenseur t est invariant par les endomorphismes $\overset{1}{\alpha}$ et par les transformations $\overset{0}{\mathfrak{T}}_{\alpha}$ alors $\nabla t = 0$.

§ 6. — Cas où les transformations $\mathfrak{T}_{\mathrm{R}}$ sont projectives ou conformes.

Dans tout ce paragraphe V est supposé espace d'Einstein.

1° Dans ce cas le tenseur de courbure projectif s'écrit :

$$W^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^i{}_l g_{jk} - \delta^i{}_k g_{jl}),$$

pour tout vecteur projectif ξ de

$$\mathcal{L}(\xi)\, W^i{}_{jkl} = 0$$

on déduit

$$\mathfrak{L}(\xi)\,R^{i}{}_{jkl} = \frac{R}{n(n-1)}\left[\delta^{i}_{l}\mathfrak{L}(\xi)\,g_{jk} - \delta^{i}_{k}\mathfrak{L}(\xi)\,g_{jl}\right]$$
$$= \frac{R}{n(n-1)}\left[\delta^{i}_{l}(\nabla_{j}\xi_{k} + \nabla_{k}\xi_{j}) - \delta^{i}_{k}(\nabla_{j}\xi_{l} + \nabla_{l}\xi_{j})\right]$$

d'où, en tenant compte de

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$$

et de

$$(\partial_{k}\nabla_{j}\xi^{i})_{0} = 0,$$
$$(\mathfrak{L}(\xi)R^{i}{}_{jkl})_{0} = (\partial_{r}\mathfrak{L}(\xi)R^{i}{}_{jkl})_{0} = 0;$$

on en tire les mêmes conclusions qu'au paragraphe précédent.

2° Le tenseur de courbure conforme dans le cas d'un espace d'Einstein est identique au tenseur de courbure projectif, nous pouvons donc énoncer.

Théorème. — *Soit* V *un espace d'Einstein. Si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_{R}$ *sont projectives ou conformes* V *est un espace* (H). *Si la courbure scalaire est non nulle* (*resp. si* V *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_{R}$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_{R}$ (*resp.* $\overset{1}{\mathfrak{T}}_{R}$, $\overset{2}{\mathfrak{T}}_{R}$) *sont projectives ou conformes*, V *est localement symétrique.*

§ 7. — Invariance de l'élément de volume.

Si V est harmonique [15], [16], les transformations conservent évidemment l'élément de volume. Nous allons plus généralement étudier quelles conséquences entraînent pour V l'invariance de l'élément de volume par les transformations $\mathfrak{T}_{R}$. L'invariance de l'élément de volume par une transformation définie par un vecteur ξ se traduit par

$$\mathfrak{L}(\xi)g = \xi^{r}\partial_{r}g + 2g\partial_{r}\xi^{r} = 0.$$

Or, pour les vecteurs ξ considérés

$$\partial_{r}\xi^{r} = 0$$

et, la condition de conservation de l'élément de volume se réduit à

$$\xi^{r}\partial_{r}g = 0$$

d'où

$$(7\text{-}1) \qquad [\partial_{a_1 \ldots a_n}(\xi^r \partial_r g)]_0 = 0$$

mais

$$(\xi^i)_0 = 0$$
$$\partial_a \xi^i = (\partial_a \xi^i)_0 = (\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p} R^i{}_{amn} U^m V^n U_1^{a_1} \ldots U_p^{a_p})_0$$
$$(\partial_{a \ldots l} \xi^i)_0 = 0$$

donc, dans (7-1) seuls sont différents de 0 les termes où figure une seule dérivation de ξ^r. (7-1) s'écrit alors :

$$(7\text{-}2) \qquad (S' \partial_{a_{i_1}} \xi^r \partial_{r a_{i_2} \ldots a_{i_n}} g)_0$$

où S' désigne la somme de tous les termes obtenus en remplaçant successivement a_{i_1} par $a_1, \ldots, a_n$. Partons maintenant de

$$\partial_r g = 2g \Gamma^i_{ir},$$

on peut écrire

$$\partial_{r a_1 \ldots a_n} g = 2g \partial_{a_1 \ldots a_n} \Gamma^i_{ir} + \Gamma^i_{ir} \partial_{a_1 \ldots a_n} g + 2S' \partial_{a_{i_1}} g \partial_{a_{i_2} \ldots a_{i_n}} \Gamma^i_{ir}$$
$$+ 2 \sum_{p=2}^{n-1} S \partial_{a_{i_1} \ldots a_{i_p}} g \partial_{a_{i_{p+1}} \ldots a_{i_n}} \Gamma^i_{ir}$$

où S' a la même signification que précédemment et où la somme S est étendue à toutes les combinaisons p à p des n nombres $a_1 \ldots a_n$. En introduisant les tenseurs normaux, on a

$$(\partial_{r a_1 \ldots a_n} g)_0 = \left[2g A^s{}_{s r a_1 \ldots a_n} + 2 \sum_{p=2}^{n-1} S \partial_{a_{i_1} \ldots a_{i_p}} g A^s{}_{s r a_{i_{p+1}} \ldots a_{i_n}} \right]_0$$

$$\left(\partial_{r a_{i_2} \ldots a_{i_n}} g \right)_0 = \left[2g A^s{}_{s r a_{i_2} \ldots a_{i_n}} + 2 \sum_{p=3}^{n-1} S'' \partial_{a_{i_{j_2}} \ldots a_{i_{j_p}}} g A^s{}_{s r a_{i_{j_{p+1}}} \ldots a_{i_{j_n}}} \right]_0$$

où la somme S'' est étendue à toutes les combinaisons de $p - 1$ des $n - 1$ nombres $i_2 \ldots i_n$ (7.2) entraîne alors

$$(7.3) \qquad \Big[g S' \partial_{a_{i_1}} \xi^r A^s{}_{s r a_{i_2} \ldots a_{i_n}}$$
$$+ S' \partial_{a_{i_2}} \xi^r \sum_{p=3}^{n-1} S'' \partial_{a_{i_{j_2}} \ldots a_{i_{j_p}}} g A^s{}_{s r a_{i_{j_{p+1}}} \ldots a_{i_{j_n}}} \Big]_0 = 0,$$

or on a

$$(\partial_a g)_0 = 0,$$
$$(\partial_{ab} g)_0 = 2(g A^s{}_{sab})_0,$$
$$(\partial_{ab} \mathcal{L}(\xi) g)_0 = (\partial_b \xi^h \partial_{ah} g + \partial_a \xi^h \partial_{hb} g)_0 = 2g(\partial_b \xi^h A^s{}_{sha} + \partial_a \xi^h A^s{}_{shb})_0 = 0,$$

on déduit alors de (7-3) par récurrence sur n

$$(7\text{-}4) \qquad \left(S\partial_{a_{i_1}}\xi^r A^s{}_{sra_{i_2}\ldots a_{i_n}}\right)_0 = 0$$

d'où, si les $\mathcal{G}_R$ relatives à un point quelconque de V conservent l'élément de volume, (7-4) entraîne les égalités tensorielles qui généralisent les équations de Copson et Ruse des espaces harmoniques.

$$(7\text{-}5) \qquad \nabla_m\nabla_n A^s{}_{sa_1\ldots a_n} - \nabla_n\nabla_m A^s{}_{sa_1\ldots a_n} = 0.$$

Reprenons maintenant les équations (7-4) pour les tenseurs normaux d'ordre 2 et 3

$$(7\text{-}6) \qquad R^p{}_{imn}A^s{}_{spj} + R^p{}_{jmn}A^s{}_{sip} = 0$$

$$(7\text{-}7) \qquad R^p{}_{imn}A^s{}_{spjk} + R^p{}_{jmn}A^s{}_{sipk} + R^p{}_{kmn}A^s{}_{sijp} = 0$$

$$(7\text{-}8) \qquad \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_q}R^p{}_{imn}A^s{}_{spj} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_q}R^p{}_{jmn}A^s{}_{sip} = 0$$

$$(7\text{-}9) \qquad \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_q}R^p{}_{imn}A^s{}_{spjk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_q}R^p{}_{jmn}A^s{}_{sipk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_q}R^p{}_{kmn}A^s{}_{sijp} = 0.$$

En utilisant (3-7), (7-6) et (7-7) s'écrivent pour $q = 1$

$$(7\text{-}10) \qquad R^p{}_{imn}R_{pj} + R^p{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

$$(7\text{-}11) \qquad \nabla_k R^p{}_{imn}R_{pj} + \nabla_k R^p{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

d'où, par dérivation de (7-10), et, compte tenu de (7-11),

$$(7\text{-}12) \qquad R^p{}_{imn}\nabla_k R_{pj} + R^p{}_{jmn}\nabla_k R_{ip} = 0$$

(7-7) s'écrit, d'après (3-8)

$$(7\text{-}13) \qquad R^p{}_{imn}(\nabla_k R_{pj} + \nabla_p R_{jk} + \nabla_j R_{kp}) + R^p{}_{jmn}(\nabla_k R_{ip} + \nabla_i R_{pk} + \nabla_p R_{ki}) + R^p{}_{kmn}(\nabla_p R_{ij} + \nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi}) = 0.$$

En tenant compte des équations analogues à (7-12) déduites de (7-12) par permutation de i et k et par permutation de j et k (7.13) se réduit à

$$(7\text{-}14) \qquad R^p{}_{imn}\nabla_p R_{jk} + R^p{}_{jmn}\nabla_p R_{ki} + R^p{}_{kmn}\nabla_p R_{ij} = 0,$$

contractons i et k dans (7.12),

$$(7\text{-}15) \qquad R^{pi}{}_{mn}\nabla_i R_{pj} + \frac{1}{2}R^p{}_{jmn}\partial_p R = 0,$$

Contractons i et j dans (7.14)

$$2R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik} + R^p{}_{kmn}\partial_p R = 0,$$

d'où en comparant avec (7-15) (écrite en remplaçant j par k)

$$R^{pi}{}_{mn}\nabla_i R_{pk} = R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik},$$

or,

$$R^{pi}{}_{mn}\nabla_i R_{pk} = -R^{ip}{}_{mn}\nabla_i R_{pk} = -R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik},$$

d'où

$$R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik} = 0$$

d'où, en utilisant la première identité de Bianchi

$$R^{p}{}_{mn}{}^{i}\nabla_p R_{ik} + R^{p}{}_{n}{}^{i}{}_{m}\nabla_p R_{ik} = 0.$$

On en déduit

(7-16) $$R^{p}{}_{n}{}^{i}{}_{m}\nabla_i R_{pk} = R^{p}{}_{n}{}^{i}{}_{m}\nabla_p R_{ik},$$

Contractons maintenant m et k dans (7-12)

(7-17) $$R^{p}{}_{i}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{pj} + R^{p}{}_{j}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{ip} = 0,$$

contractons i et m dans (7-14), ce qui peut s'écrire, d'après (7-16),

(7-18) $$R^{p}{}_{n}\nabla_p R_{jk} + R^{p}{}_{j}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{kp} + R^{p}{}_{k}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{pj} = 0,$$

et, en comparant avec (7-17)

(7-19) $$R^{p}{}_{n}\nabla_p R_{jk} = 0.$$

Considérons maintenant (7-8) pour $q = 2$,

(7-20) $$\nabla_k\nabla_r R^{p}{}_{imn}R_{pj} + \nabla_k\nabla_r R^{p}{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

utilisons (7-8) pour $q = 1$, sous la forme

$$\nabla_r R^{p}{}_{imn}R_{pj} + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

par dérivation covariante, et en tenant compte de (7-20)

(7-21) $$\nabla_r R^{p}{}_{imn}\nabla_k R_{pj} + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}\nabla_k R_{ip} = 0,$$

(7-9), pour $q = 1$, donne

(7-22) $$\begin{aligned}\nabla_r R^{p}{}_{imn}(\nabla_k R_{pj} + \nabla_p R_{jk} + \nabla_j R_{kp}) \\ + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}(\nabla_k R_{ip} + \nabla_i R_{pk} + \nabla_p R_{ki}) \\ + \nabla_r R^{p}{}_{kmn}(\nabla_p R_{ij} + \nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi}) = 0,\end{aligned}$$

et, en tenant compte des équations analogues à (7-21) obtenues par permutation de i et k, puis j et k (7-22) se réduit à

(7-23) $$\nabla_r R^{p}{}_{imn}\nabla_p R_{jk} + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}\nabla_p R_{ki} + \nabla_r R^{p}{}_{kmn}\nabla_p R_{ij} = 0,$$

Contractons i et k, j et m, n et r dans (7-21), en utilisant les relations

$$\nabla_h R_i{}^h{}_{rs} = \nabla_r R_{is} - \nabla_s R_{ir}$$

et

$$\nabla_s R^s{}_r = \frac{1}{2} \nabla_r R,$$

il vient

$$(7\text{-}24) \qquad (\nabla^p R^{ji} - \nabla^i R^{jp}) \nabla_i R_{pj} + \frac{1}{4} \nabla^p R \nabla_p R = 0,$$

Contractons maintenant dans (7-21) i et m, j et r, k et n,

$$\nabla^j R^{pk} \nabla_k R_{pj} + (\nabla^i R^{pk} - \nabla^k R^{pi}) \nabla_k R_{ip} = 0$$

où

$$(7\text{-}25) \qquad (2\nabla^i R^{pk} - \nabla^k R^{pi}) \nabla_k R_{ip} = 0$$

contractons i et j, k et m, n et r, dans (7-23)

$$(7\text{-}26) \qquad (\nabla^p R^{ki} - \nabla^i R^{kp}) \nabla_p R_{ik} + \frac{1}{4} \nabla^p R \nabla_p R = 0.$$

Comparons cette équation avec (7-24) qui peut s'écrire

$$[\nabla^i R^{kp} - \nabla^p R^{ki}] \nabla_p R_{ik} + \frac{1}{4} \nabla^p R \nabla_p R = 0$$

on en déduit

$$\nabla^p R \nabla_p R = 0$$

et

$$(\nabla^i R^{kp} - \nabla^p R^{ki}) \nabla_p R_{ik} = 0$$

et, dans (7-25) on peut alors remplacer $\nabla^i R^{pk} \nabla_k R_{ip}$ par $\nabla^p R^{ki} \nabla_p R_{ik}$, (7-25) se réduit alors à

$$\nabla^k R^{ip} \nabla_k R_{ip} = 0.$$

Théorème. — *Soit* V *un espace riemannien. Si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$ *conservent l'élément de volume,* V *vérifie le système infini de relations*

$$\nabla_m \nabla_n A^s{}_{sa_1 \ldots a_p} - \nabla_n \nabla_m A^s{}_{sa_1 \ldots a_p} = 0.$$

Si la courbure de Ricci est non dégénérée (resp. si V *est proprement riemannien) et si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$ *(resp.* $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{\mathrm{II}}{\mathfrak{T}}_R$*) conservent l'élément de volume, le tenseur de Ricci de* V *est à dérivée covariante nulle.*

Considérons maintenant les transformations locales notées $\overset{1}{\theta}_R$ définies par les vecteurs donnés en coordonnées normales d'origine O par

$$\eta^p = (\nabla_u R^p{}_{kmn} U^m V^n W^k)_0 \, x^u,$$

on a

$$\partial_r \eta^p = (\nabla_r R^p{}_{kmn} U^m V^n W^k)_0.$$

En nous plaçant dans le cas où l'espace est espace d'Einstein

$$\nabla_r R^r{}_{kmn} = 0$$

donc

$$\partial_r \eta^r = 0$$

la conservation de l'élément de volume par les transformations $\overset{1}{\theta}_R$ se traduit comme précédemment par les relations

$$(S \partial_{a_{i_1}} \eta^r A^s{}_{sra_{i_2} \dots a_{i_n}})_0 = 0,$$

Considérons simplement l'équation

(7-27) $$\partial_i \eta^p A^s{}_{spj} + \partial_j \eta^p A^s{}_{sip} = 0,$$

dans le cas d'un espace d'Einstein,

$$A^s{}_{sij} = -\frac{R}{3n} g_{ij},$$

(7-27) donne alors

(7-28) $$\nabla_j R_{mnki} + \nabla_i R_{mnkj} = 0$$

utilisons maintenant l'identité de Bianchi :

(7-29) $$\nabla_j R_{mnki} + \nabla_k R_{mnij} + \nabla_i R_{mnjk} = 0$$

par addition de (7-28) et (7-29), il vient

(7-30) $$2\nabla_j R_{mnki} + \nabla_k R_{mnij} = 0$$

mais, d'après (7-28)

(7-31) $$\nabla_k R_{mnij} + \nabla_j R_{mnik} = 0,$$

et de (7-30) et (7-31) on déduit par soustraction

$$\nabla_j R_{mnki} = 0$$

nous pouvons donc énoncer, en reprenant les résultats précédents :

Théorème. — *Soit* V_n *un espace riemannien. Si la courbure de Ricci est non dégénérée* (*resp. si* V_n *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{1}{\theta}_R$, $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$ (*resp.* $\overset{1}{\theta}_R$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{2}{\mathfrak{T}}_R$) *conservent l'élément de volume,* V_n *est localement symétrique.*

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS $\mathcal{T}_R$ SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

§ 8. — Variété analytique complexe :

(Voir par exemple [12], p. 219)

Dans ce paragraphe nous donnons les définitions et notations utilisées dans la suite du chapitre. Soit V_{2n} une variété à $2n$ dimensions, rappelons qu'une carte locale complexe ou système de coordonnées locales complexes est un homéomorphisme d'un ouvert U de V_{2n} sur un ouvert de C^n; U est dit le domaine de la carte. Ainsi se trouve associé à chaque point x de U un système de n nombres complexes z^α qui sont dits coordonnées locales complexes de U. La variété est dite analytique complexe s'il existe un ensemble A de cartes locales complexes satisfaisant aux deux axiomes suivants :

A_1 La réunion des domaines des cartes de A est identique à V_{2n}.

A_2 Si $x \in U_1 \cap U_2$ où U_1 et $U_2 \in A$, les coordonnées complexes de x dans l'une des cartes sont des fonctions analytiques complexes à jacobien non nul des coordonnées de x dans l'autre carte, (z^α) étant un système de coordonnées locales complexes, nous posons

$$z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^\alpha + ix^{\alpha^*}) \qquad \alpha^* = \alpha + n;$$

les $2n$ nombres réels x sont dits les coordonnées locales réelles associées aux coordonnées locales complexes. Si à ces $2n$ coordonnées nous substituons les $2n$ nombres complexes,

$$z^\alpha, \qquad z^{\alpha^*} = \overline{z^\alpha}.$$

Les formes $(dz^{\alpha}, dz^{\alpha^*})$ définissent un repère de $(T_x{}^C)^*$, espace vectoriel complexifié de l'espace $(T_x)^*$ dual de l'espace des vecteurs tangents en x, par dualité on en déduit un repère $(e_{\alpha}, e_{\alpha^*})$ de $T_x{}^C$ complexifié de T_x. C'est à de tels repères que nous rapporterons les tenseurs de la variété analytique complexe. La structure analytique complexe de V_{2n} définit un opérateur $\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I}^2 = -$ identité) dont le tenseur associé a pour composantes :

$$\Phi_{\alpha}{}^{\beta} = i\delta_{\alpha}^{\beta}, \qquad \Phi_{\alpha^*}{}^{\beta^*} = -i\delta_{\alpha^*}^{\beta^*}, \qquad \Phi_{\alpha}{}^{\beta^*} = \Phi_{\alpha^*}{}^{\beta} = 0.$$

Un tenseur est réel s'il satisfait à la condition suivante : les composantes complexes qui se déduisent l'une de l'autre en étoilant tous les indices sont complexes conjuguées. Une variété analytique complexe est dite hermitienne si elle admet une structure de variété proprement riemannienne telle que le produit scalaire de deux vecteurs et celui de leurs images par $\mathfrak{I}$ soient égaux. La métrique hermitienne peut alors s'écrire

$$ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*}\, dz^{\alpha}\, dz^{\beta^*}.$$

La variété est dite Kählerienne si la forme associée

$$ig_{\alpha\beta^*}\, dz^{\alpha} \wedge dz^{\beta^*}$$

est fermée; elle est alors à dérivée covariante nulle. Il en résulte des conséquences pour le tenseur de courbure : les seules composantes non nulles sont, aux conjugaisons près, celles de la forme $R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*}$, et, dans une telle composante on peut permuter deux indices étoilés et deux indices non étoilés.

§ 9. — Variété kahlérienne. Cas où les transformations $\mathcal{T}_R$ sont analytiques.

Sur une variété analytique complexe, dire qu'une transformation est analytique, c'est dire que cette transformation laisse invariante la structure analytique complexe, ou, ce qui est équivalent l'opérateur $\mathfrak{I}$. Soit d'une manière générale sur une variété riemannienne V un tenseur $\Phi_j^{\,i}$ à dérivée covariante nulle; supposons ce tenseur invariant par les

transformations $\mathcal{T}_R$; ξ désignant le vecteur associé à une telle transformation, en utilisant :

$$\nabla_p \Phi_j^i = 0$$

on a

$$\text{(9-1)} \quad \begin{gathered} \mathcal{L}(\xi)\, \Phi_j^i = (\Omega^h{}_j)_0\, \Phi_h{}^i - (\Omega^i{}_h)_0\, \Phi_j{}^h + \partial_p \Phi_j^i (\Omega^p{}_k)_0\, x^k \\ (\mathcal{L}(\xi)\, \Phi_j^i)_0 = (\partial_a \mathcal{L}(\xi)\, \Phi_j^i)_0 = 0 \end{gathered}$$

et

$$(\partial_{ab}\mathcal{L}(\xi)\, \Phi_j^i)_0 = (\Omega^h{}_j \partial_{ab} \Phi_h{}^i - \Omega^i{}_h \partial_{ab} \Phi_j{}^h + \partial_{ap} \Phi_j^i \Omega^p{}_b + \partial_{bp} \Phi_j^i \Omega^p{}_a)_0$$
$$(\partial_{abc}\mathcal{L}(\xi)\, \Phi_j^i)_0 = (\Omega^h{}_j \partial_{abc} \Phi_h{}^i - \Omega^i{}_h \partial_{abc} \Phi_j{}^h + \partial_{abp} \Phi_j^i \Omega^p{}_c + \partial_{acp} \Phi_j^i \Omega_b{}^p + \partial_{bcp} \Phi_j^i \Omega^p{}_a)_0$$

(où les Ω sont les tenseurs définis au paragraphe 4) d'autre part, de :

$$\partial_a \Phi_j^i = \Gamma^h_{aj} \Phi_h{}^i - \Gamma^i_{ah} \Phi_j{}^h,$$

on déduit

$$(\partial_{ab} \Phi_j^i)_0 = (\partial_b \Gamma^h_{aj} \Phi_h{}^i - \partial_b \Gamma^i_{ah} \Phi_j{}^h)_0$$

et

$$(\partial_{abc} \Phi_j^i)_0 = (\partial_{bc} \Gamma^q_{aj} \Phi_q{}^i - \partial_{bc} \Gamma^i_{aq} \Phi_j{}^q)_0.$$

Le tenseur Φ étant invariant par la transformation $\mathcal{T}$:

$$\text{(9-2)} \qquad (\partial_{ab}\mathcal{L}(\xi) \Phi_j^i)_0 = (\partial_{abc}\mathcal{L}(\xi) \Phi_j^i)_0 = 0.$$

Nous allons expliciter ces relations, en remplaçant, d'après

$$\nabla_k \nabla_l \Phi_j^i - \nabla_l \nabla_k \Phi_j^i = 0,$$

$$\partial_a \Gamma^q_{bj} \Omega^i{}_h \Phi_q{}^h \quad \text{par} \quad \partial_a \Gamma^h_{bj} \Omega^q{}_h \Phi_q{}^i,$$

et

$$\partial_a \Gamma^i_{bq} \Omega^h{}_j \Phi_h{}^q \quad \text{par} \quad \partial_a \Gamma^i_{bh} \Omega^h{}_q \Phi_j{}^q;$$

et de même

$$\partial_{bc} \Gamma^i_{aq} \Phi_h{}^q \Omega^h{}_j \quad \text{par} \quad \partial_{bc} \Gamma^i_{ap} \Omega^p{}_q \Phi_j{}^q$$

et

$$\partial_{bc} \Gamma^q_{aj} \Phi_q{}^h \Omega^i{}_h \quad \text{par} \quad \partial_{bc} \Gamma^p_{aj} \Omega^q{}_p \Phi_q{}^i.$$

Introduisons d'autre part les tenseurs normaux $A^i{}_{jabcl}$, en remarquant les symétries pour a et j d'une part et pour deux quelconques des indices $b, c, \ldots l$ d'autre part. Les équations (9.2) entraînent :

$$\text{(9-3)} \quad \begin{aligned} &[A_{pbja} \Omega^p{}_q + A_{qpja} \Omega^p{}_b + A_{qbpa} \Omega^p{}_j + A_{qbjp} \Omega^p{}_a] \Phi_i{}^q \\ &\quad + [A_{pbqa} \Omega^p{}_i + A_{ipqa} \Omega^p{}_b + A_{ibpa} \Omega^p{}_q + A_{ibqp} \Omega^p{}_a] \Phi_j{}^q = 0 \end{aligned}$$

et

$$(9\text{-}4)\quad [A_{pbjac}\Omega^p{}_q + A_{qpjac}\Omega^p{}_b + A_{qbpac}\Omega^p{}_j + A_{qbjpc}\Omega^p{}_a + A_{qpjab}\Omega^p{}_c]\Phi_i^q$$
$$+ [A_{pbqac}\Omega^p{}_i + A_{ipqac}\Omega^p{}_b + A_{ibpac}\Omega^p{}_q + A_{ibqpc}\Omega^p{}_a + A_{ipqab}\Omega^p{}_c]\Phi_j^q = 0.$$

Supposons maintenant que V est une variété kählerienne et calculons les composantes des tenseurs normaux dans un repère adapté à la structure complexe. D'après les calculs du paragraphe 3, et, en utilisant les relations classiques entre les composantes du tenseur de courbure d'un espace kählerien, on voit que les seules composantes non nulles des tenseurs normaux sont données, aux conjugaisons et symétriques près, par

$$A_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = \frac{1}{3} R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*}, \qquad A_{\alpha\beta^*\gamma^*\delta} = \frac{2}{3} R_{\alpha\beta^*\gamma^*\delta},$$
$$A_{\eta\zeta\mu\alpha^*\beta^*} = \frac{1}{6} \nabla_\zeta R_{\eta\alpha^*\mu\beta^*}, \qquad A_{\eta\zeta\mu^*\alpha\beta^*} = \frac{1}{6} \nabla_\zeta R_{\eta\mu^*\alpha\beta^*},$$
$$A_{\eta\zeta\mu^*\alpha^*\beta^*} = \frac{1}{2} \nabla_{\alpha^*} R_{\eta\beta^*\zeta\mu^*}, \qquad A_{\eta\zeta^*\mu^*\alpha\beta} = \frac{5}{6} \nabla_\alpha R_{\eta\zeta^*\mu^*\beta},$$
$$A_{\eta\zeta^*\mu^*\alpha^*\beta} = \frac{1}{2} \nabla_{\zeta^*} R_{\eta\mu^*\alpha^*\beta}.$$

Prenons maintenant pour Φ le tenseur définissant la structure complexe, les équations (9-3) et (9-4) deviennent alors, aux conjugaisons et aux symétries près :

$$(9\text{-}5)\quad R_{\mu\beta^*\zeta\alpha^*}\Omega^\mu{}_\eta + R_{\eta\mu^*\zeta\alpha^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\beta^*} + R_{\eta\beta^*\mu\alpha^*}\Omega^\mu{}_\zeta + R_{\eta\beta^*\zeta\mu^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\alpha^*} = 0,$$
$$(9\text{-}6)\quad \nabla_\gamma R_{\mu\beta^*\zeta\alpha^*}\Omega^\mu{}_\eta + \nabla_\gamma R_{\eta\mu^*\zeta\alpha^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\beta^*} + \nabla_\gamma R_{\eta\beta^*\mu\alpha^*}\Omega^\mu{}_\zeta$$
$$+ \nabla_\gamma R_{\eta\beta^*\zeta\mu^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\alpha^*} + \nabla_\mu R_{\eta\alpha^*\zeta\beta^*}\Omega^\mu{}_\gamma = 0$$

avec l'équation analogue en remplaçant simplement γ par γ^*, on voit immédiatement que ces équations entraînent les équations (5-2) et (5-3).

THÉORÈME. — *Soit* V *une variété kählerienne, si les transformations* $\overset{\blacksquare}{\mathcal{T}}_R$ *sont analytiques,* V *est une variété* (H). *Si la courbure de Ricci est non dégénérée (resp. si* V *est proprement riemannienne) et si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$ *(resp.* $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{2}{\mathcal{T}}_R$*) sont analytiques,* V *est localement symétrique.*

§ 10. — Variétés kählériennes : cas où les transformations $\mathfrak{T}_R$ sont projectives ou conformes.

1° Soit V_{2n} une variété kählerienne, les transformations $\mathfrak{T}_R$ sont supposées projectives, alors

$$\mathfrak{L}(\xi)W^i_{jkl} = 0$$

d'où

$$\mathfrak{L}(\xi)R^i_{jkl} = \frac{1}{2n-1}(\delta^i_l\mathfrak{L}(\xi)R_{jk} - \delta^i_k\mathfrak{L}(\xi)R_{jl})$$

$$= \frac{1}{2n-1}[\delta^i_l(\xi^a\nabla_a R_{jk} + \nabla_j\xi^a R_{ak} + \nabla_k\xi^a R_{ja}) - \delta^i_k(\xi^a\nabla_a R_{jl} + \nabla_j\xi^a R_{al} + \nabla_l\xi^a R_{ja})]$$

on en déduit

$$(\mathfrak{L}(\xi)R^i_{jkl})_0 = \frac{1}{2n-1}[\delta^i_l(\Omega^a{}_j R_{ak} + \Omega^a{}_k R_{ja}) - \delta^i_k(\Omega^a{}_j R_{al} + \Omega^a{}_l R_{ja})]_0$$

$$(\partial_r\mathfrak{L}(\xi)\,R^i_{jkl})_0 = \frac{1}{2n-1}[\delta^i_l(\Omega^q{}_r\nabla_a R_{jk} + \Omega^a{}_j\nabla_r R_{ak} + \Omega^a{}_k\nabla_r R_{ja}) - \delta^i_k(\Omega^a{}_r\nabla_a R_{jl} + \Omega^a{}_j\nabla_r R_{al} + \Omega^a{}_l\nabla_r R_{ja})]_0,$$

d'où les égalités tensorielles :

$$\begin{aligned}(10\text{-}1)\quad & R_{qjkl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{imn} + R_{iqkl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn} \\ & + R_{ijql}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn} + R_{ijkq}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn} \\ & = \frac{1}{2n-1}[g_{il}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}R_{qk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}R_{jq}) \\ & \quad - g_{ik}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}R_{ql} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}R_{jq})],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10\text{-}2)\quad & \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{ijkl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{imn}\nabla_r R_{qjkl} \\ & + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{iqkl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}\nabla_r R_{ijql} \\ & + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}\nabla_r R_{ijkq} = \frac{1}{2n-1}[g_{il}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{jk} \\ & + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{qk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}\nabla_r R_{jq}) \\ & - g_{ik}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{jl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{ql} \\ & + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}\nabla_r R_{jq})].\end{aligned}$$

Considérons l'équation (10-1) pour $p = 0$ et écrivons-la pour des indices i, j, k, l de la forme $\alpha, \beta^*, \gamma, \delta^*$.

$$\begin{aligned}(10\text{-}3)\quad & R_{q\beta^*\gamma\delta^*}R^q{}_{\alpha mn} + R_{\alpha q\gamma\delta^*}R^q{}_{\beta^* mn} + R_{\alpha\beta^* q\delta^*}R^q{}_{\gamma mn} \\ & + R_{\alpha\beta^*\gamma q}R^q{}_{\delta^* mn} = \frac{1}{2n-1}[g_{\alpha\delta^*}(R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q})].\end{aligned}$$

Remarquons d'abord que

$$R_{q\beta^*\gamma\delta^*}R^q{}_{\alpha mn} + R_{\alpha\beta^*\gamma q}R^q{}_{\delta^* mn} = R_{\lambda\beta^*\gamma\delta^*}R^\lambda{}_{\alpha mn}$$
$$+ R_{\alpha\beta^*\gamma\lambda^*}R^{\lambda^*}{}_{\delta^* mn} = R_{\lambda\delta^*\gamma\beta^*}R^\lambda{}_{\alpha mn} + R_{\alpha\lambda^*\gamma\beta^*}R^{\lambda^*}{}_{\delta^* mn};$$

en contractant α et δ^*, on a :

$$R_{\lambda\alpha^*\gamma\beta^*}R^{\lambda\alpha^*}{}_{mn} + R_{\alpha\lambda^*\gamma\beta^*}R^{\lambda^*\alpha}{}_{mn} = R_{\lambda\alpha^*\gamma\beta^*}R^{\lambda\alpha^*}{}_{mn} - R_{\alpha\lambda^*\gamma\beta^*}R^{\alpha\lambda^*}{}_{mn} = 0$$

à partir de (10-3) on obtient donc, par contraction de α et δ^*

$$R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q} = \frac{n}{2n-1}(R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q}),$$

d'où, pour $n > 1$

$$R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q} = 0$$

l'équation (10-3) se réduit alors à

$$H_{\alpha\beta^*\gamma\delta^* mn} = 0.$$

Par dérivation covariante de (10-1) pour $p = 0$, et, en tenant compte de (10-1) pour $p = 1$, on obtient :

$$\nabla_{a_1}R_{qjkl}R^q{}_{imn} + \nabla_{a_1}R_{iqkl}R^q{}_{jmn} + \nabla_{a_1}R_{ijql}R^q{}_{kmn} + \nabla_{a_1}R_{ijkq}R^q{}_{lmn}$$
$$= \frac{1}{2n-1}[g_{il}(R_{qjmn}\nabla_{a_1}R_{qk} + R_{qkmn}\nabla_{a_1}R_{jk})$$
$$- g_{ik}(R^q{}_{jmn}\nabla_{a_1}R_{ql} + R^q{}_{lmn}\nabla_{a_1}R_{lq})],$$

d'où, en utilisant (10-2) pour $p = 0$

$$R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{ijkl} = \frac{1}{2n-1}R^q{}_{rmn}[g_{il}\nabla_q R_{jk} - g_{ik}\nabla_q R_{jl}],$$

en contractant r et m et, en supposant la courbure de Ricci non dégénérée, on en déduit :

$$\text{(10-4)} \qquad \nabla_q R_{ijkl} = \frac{1}{2n-1}(g_{il}\nabla_q R_{jk} - g_{ik}\nabla_q R_{jl})$$

Écrivons cette équation pour les indices i, j, k, l de la forme α, β^*, γ, δ^*, on aura alors :

$$\text{(10-5)} \qquad \nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = \frac{1}{2n-1}g_{\alpha\delta^*}\nabla_q R_{\beta^*\gamma}$$

contractons α et δ^*, on en déduit, pour $n > 1$

$$\nabla_q R_{\beta^*\gamma} = 0$$

et (10-5) donne alors

$$\nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = 0.$$

Par dérivation covariante de (10-1) pour $p = 1$, et, en tenant compte de (10-2) pour $p = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla_{a_1} R_{qjkl} \nabla_{a_2} R^q{}_{imn} + \nabla_{a_1} R_{iqkl} \nabla_{a_2} R^q{}_{jmn} \\ + \nabla_{a_1} R_{ijql} \nabla_{a_2} R^q{}_{kmn} + \nabla_{a_1} R_{ijkq} \nabla_{a_2} R^q{}_{lmn} \\ = \frac{1}{2n-1} [g_{il}(\nabla_{a_2} R^q{}_{jmn} \nabla_{a_1} R_{qk} + \nabla_{a_2} R^q{}_{kmn} \nabla_{a_1} R_{jq}) \\ - g_{ik}(\nabla_{a_2} R^q{}_{jmn} \nabla_{a_1} R_{ql} + \nabla_{a_2} R^q{}_{lmn} \nabla_{a_1} R_{jq})],\end{aligned}$$

et, en utilisant (10-2) pour $p = 1$

$$(10\text{-}6) \quad \nabla_a R^q{}_{rmn} \nabla_q R_{ijkl} = \frac{1}{2n-1} \nabla_a R^q{}_{rmn} (g_{il} \nabla_q R_{jk} - g_{ik} \nabla_q R_{jl}).$$

Prenons encore les indices i, j, k, l de la forme $\alpha, \beta^*, \gamma, \delta^*$

$$(10\text{-}7) \quad \nabla_a R^q{}_{rmn} \nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = \frac{1}{2n-1} \nabla_a R^q{}_{rmn} g_{\alpha\delta^*} \nabla_q R_{\beta^*\gamma}$$

contractons α et δ^*, on en déduit pour $n > 1$

$$\nabla_a R^q{}_{rmn} \nabla_q R_{\beta^*\gamma} = 0$$

(10-7) se réduit alors à

$$\nabla_a R^q{}_{rmn} \nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = 0$$

ce qui, dans le cas kählerien est l'équation (5-5).

2° Nous allons maintenant étudier le cas où les transformations $\mathfrak{G}_R$ sont conformes, ξ étant le vecteur définissant la transformation locale $\mathfrak{G}_R$, rappelons que l'on a, en coordonnées normales d'origine 0

$$(\delta\xi)_0 = (\partial_a \delta\xi)_0 = 0$$

d'où

$$(\partial_{ab}(\delta\xi g_{ij}))_0 = (g_{ij} \partial_{ab} \delta\xi)_0$$

et

$$(\partial_{abc}(\delta\xi g_{ij}))_0 = (g_{ij} \partial_{abc} \delta\xi)_0$$

d'autre part de (5.1) on déduit

$$(\mathcal{L}(\xi) g_{ij})_0 = (\partial_a(\mathcal{L}(\xi) g_{ij}))_0 = 0$$

et

$$(\partial_{ab}(\mathcal{L}(\xi) g_{ij}))_0 = (\partial_{ab} g_{il} \Omega^l{}_j + \partial_{ab} g_{jl} \Omega^l{}_i + \partial_{ah} g_{ij} \Omega^h{}_b + \partial_{hb} g_{ij} \Omega^h{}_a)_0,$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant l'expression de la deuxième extension ([25] p. 96) du tenseur métrique

$$(\partial_{ab}g_{pq})_0 = \frac{1}{3}[R_{pabq} + R_{pbqa}]_0,$$

$$(\partial_{ab}(\mathcal{L}(\xi)g_{ij}))_0 = \frac{1}{3}\underset{(a,b)}{S}[R_{qbia}\Omega^q{}_j + R_{jqia}\Omega^q{}_b + R_{jbqa}\Omega^q{}_i + R_{jbiq}\Omega^q{}_a]_0,$$

où nous désignons par le symbole $\underset{(p,q,r)}{S}$ une somme étendue à toutes les permutations des indices $p, q, \ldots r$. On a de même, en utilisant

$$(\partial_{abc}g_{ij})_0 = \frac{1}{6}\underset{(a,b,c)}{S}(\nabla_c R_{iajb})_0,$$

$$(\partial_{abc}(\mathcal{L}(\xi)g_{ij}))_0 = \frac{1}{6}\underset{(a,b,c)}{S}[\nabla_c R_{qbia}\Omega^q{}_j + \nabla_c R_{jbia}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{jbqa}\Omega^q{}_c + \nabla_c R_{jbiq}\Omega^q{}_a + \nabla_q R_{jbia}\Omega^q{}_c].$$

Supposons les transformations $\mathfrak{T}$ conformes, alors

$$C_{ij} = \mathcal{L}(\xi)g_{ij} + \frac{1}{n}\delta\xi g_{ij} = 0,$$

les relations $(\partial_{ab}C_{ij})_0 = (\partial_{abc}C_{ij})_0 = 0$, entraînent

$$\frac{1}{3}\underset{(a,b)}{S}[R_{qbia}\Omega^q{}_j + R_{jqia}\Omega^q{}_b + R_{jbqa}\Omega^q{}_i + R_{jbiq}\Omega^q{}_a] + \frac{1}{n}g_{ij}A_{ab} = 0,$$

$$\frac{1}{6}\underset{(a,b,c)}{S}[\nabla_c R_{qbia}\Omega^q{}_j + \nabla_c R_{jqia}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{jbqa}\Omega^q{}_i + \nabla_c R_{jbiq}\Omega^q{}_a + \nabla_q R_{jbia}\Omega^q{}_c] + \frac{1}{n}g_{ij}A_{abc} = 0$$

où les A sont les tenseurs obtenus par extension du scalaire $\delta\xi$ V étant une variété kählerienne, écrivons les égalités tensorielles précédentes dans un système de coordonnées locales complexes, en prenant pour i et j des indices de la forme η, ζ, on a :

$$(10\text{-}9)\quad \frac{1}{3}\underset{(a,b)}{S}[R_{qb\eta a}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_\zeta + R_{\zeta q\eta a}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_b + R_{\zeta bqa}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_\eta + R_{\zeta b\eta q}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_a] = 0,$$

$$(10\text{-}10)\quad \frac{1}{3}\underset{(a,b,c)}{S}[\nabla_c R_{qb\eta a}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_\zeta + \nabla_c R_{\zeta q\eta a}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{\zeta bqa}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_\eta + \nabla_c R_{\zeta b\eta q}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_a + \nabla_q R_{\zeta b\eta a}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}\Omega^q{}_c] = 0$$

avec les équations analogues que l'on en déduit en remplaçant η, ζ par η^*, ζ^*. Considérons l'équation (10-9), pour $p = 0$, et prenons a et b de la forme α^*, β^*, il en résulte, puisqu'on peut permuter α^* et β^* :

$$\text{(10-11)} \qquad H_{\zeta\beta^*\eta\alpha^*mn} = 0$$

d'où
$$H = 0.$$

Par dérivation covariante de (10-9) pour $p = 0$, et en tenant compte de (10-10) pour $p = 1$, on obtient :

$$\underset{(a,\,b,\,c)}{S} \nabla_c R_{qb\eta a}\Omega^q{}_\zeta + \nabla_c R_{\zeta q\eta a}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{\zeta bqa}\Omega^q{}_\eta + \nabla_c R_{\zeta b\eta q}\Omega^q{}_a = 0$$

compte tenu de cette dernière relation (10-10) pour $p = 0$ s'écrit alors

$$\underset{(a,\,b,\,c)}{S} \nabla_q R_{\zeta b\eta a}\Omega^q{}_c = 0.$$

Prenons pour a, b, c des indices de la forme α^*, β^*, γ, la relation ci-dessus se réduit à

$$\nabla_q R_{\zeta^*\alpha\eta^*\beta}\Omega^q{}_\gamma = 0,$$

en prenant de même pour i et j des indices de la forme η^*, ζ^*, et a, b, c de la forme α, β, γ^*, on obtient

$$\nabla_q R_{\zeta^*\alpha\eta^*\beta}\Omega^q{}_{\gamma^*} = 0.$$

Les 2 relations précédentes entraînent

$$\nabla_q R_{iajb} R^q{}_{cmn} = 0$$

c'est-à-dire (5-4).

Par dérivation covariante de (10-9) pour $p = 1$ et compte tenu de (10-10) pour $p = 2$, on obtient :

$$\text{(10-12)} \quad \underset{(a,\,b,\,c)}{S} [\nabla_c R_{qb\eta a}\nabla_r R^q{}_{\zeta mn} + \nabla_c R_{\zeta q\eta a}\nabla_r R^q{}_{bmn} + \nabla_c R_{\zeta bqa}\nabla_r R^q{}_{\eta mn} + \nabla_c R_{\zeta b\eta q}\nabla_r R^q{}_{amn}] = 0,$$

compte tenu de (10-12), (10-10) pour $p = 1$, donne alors

$$\text{(10-13)} \qquad \underset{(a,\,b,\,c)}{S} \nabla_q R_{\eta a\zeta b}\nabla_r R^q{}_{cmn} = 0.$$

En prenant, successivement pour a, b, c des indices de la forme α^*; β^*, γ, puis α, β, γ^*, on en déduit

$$\nabla_q R_{iajb}\nabla_r R^q{}_{cmn} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (5-5). En rapprochant ces résultats de ceux obtenus pour les transformations projectives, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Soit* V_{2n} $(n > 1)$ *une variété kählerienne. Si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$ *sont projectives ou conformes,* V_{2n} *est une variété* (H). *Si la courbure de Ricci est non dégénérée (resp. si* V_{2n} *est proprement riemannienne) et si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$ *(resp.* $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{2}{\mathfrak{T}}_R$*) sont projectives ou conformes* V_{2n} *est localement symétrique.*

Remarque. — Au lieu de considérer les transformations $\mathfrak{T}_R$ définies à partir du tenseur R, nous pouvons plus généralement considérer des transformations $\mathfrak{T}_a$ définies à partir d'un tenseur $a_{iji_1\dots i_p}$ antisymétrique pour les indices i et j et tel que le déterminant d'indices i et j, $\alpha^i{}_j = a^i{}_{ji_1\dots i_p}$ soit différent de 0; alors, s'il existe sur V_{2n} un tel tenseur (par exemple une forme quadratique extérieure de rang maximum) tel que, par exemple les transformations locales $\overset{0}{\mathfrak{T}}_a$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_a$ soient conformes, V_{2n} est localement symétrique.

§ 11. — Variétés hermitiennes.

1° Soit maintenant V_{2n} une variété hermitienne, les coefficients de la connexion riemannienne (γ) sont donnés par

$$\Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = 0,$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon^*}(\partial_\gamma g_{\alpha^*\beta} + \partial_\beta g_{\varepsilon^*\gamma}),$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon^*}(\partial_{\gamma^*} g_{\beta\varepsilon^*} - \partial_{\varepsilon^*} g_{\beta\gamma^*}),$$

avec les formules complexes conjuguées.

L'invariance du tenseur canonique Φ, par les transformations $\mathfrak{T}_R$, se traduit par

$$\mathcal{L}(\xi)\Phi^j{}_i = 0$$

d'où

$$(\mathcal{L}(\xi)\Phi^j{}_i)_0 = (\partial_a \mathcal{L}(\xi)\Phi^j{}_i)_0 = 0$$

ce qui conduit aux équations

$$\Omega^r{}_i \Phi^j{}_r - \Omega^j{}_r \Phi^r{}_i = 0$$
$$\Omega^r{}_i \nabla_a \Phi^j{}_r - \Omega^j{}_r \nabla_a \Phi^r{}_i + \nabla_p \Phi^j{}_i \Omega^p{}_a = 0.$$

En considérant l'invariance de Φ par $\overset{0}{\mathcal{C}}_{\mathrm{R}}$ et $\overset{1}{\mathcal{C}}_{\mathrm{R}}$, il en résulte

$$\mathrm{R}^p{}_{amn} \nabla_p \Phi^j{}_i = 0,$$

d'où, si la courbure de Ricci est non dégénérée

$$\nabla_p \Phi^j{}_i = 0$$

V est kählerienne, on peut alors appliquer les résultats du paragraphe 9 concernant les transformations $\overset{0}{\mathcal{C}}_{\mathrm{R}}$ et $\overset{1}{\mathcal{C}}_{\mathrm{R}}$.

Théorème. — *Soit* V_{2n} *une variété hermitienne, si la structure complexe est invariante par les transformations* $\overset{0}{\mathcal{C}}_{\mathrm{R}}$ *et* $\overset{1}{\mathcal{C}}_{\mathrm{R}}$ *et si la courbure de Ricci est non dégénérée,* V *est kählerienne, localement symétrique.*

2° Considérons sur V_{2n} la deuxième connexion canonique (ε) ([12], p. 243), dont les coefficients, notés E^i_{jk}, sont donnés en coordonnées locales complexes par

$$\mathrm{E}^{\beta}_{\gamma^*\alpha} = \mathrm{E}^{\beta}_{\alpha\gamma^*} = 0, \qquad \mathrm{E}^{\beta}_{\gamma\alpha} = g^{\beta\rho^*}\partial_\gamma g_{\alpha\rho^*}$$

avec les formules complexes conjuguées. Nous désignerons par S le tenseur de torsion et par D le symbole de dérivation covariante de la connexion (ε); on a

$$\mathrm{D}_a g_{ij} = \mathrm{D}_a \Phi_{ij} = 0.$$

En coordonnées locales complexes, les seules composantes non nulles du tenseur S sont du type $\mathrm{S}^\alpha{}_{\beta\gamma}$ et $\mathrm{S}^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma^*}$, avec

$$\mathrm{S}^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}^\alpha_{\beta\gamma} - \mathrm{E}^\alpha_{\gamma\beta}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon^*}(\partial_\gamma g_{\beta\varepsilon^*} - \partial_\beta g_{\gamma\varepsilon^*})$$

pour la forme S_{ijk}, les seules composantes non nulles sont du type $\mathrm{S}_{\alpha^*\beta\gamma}$ et $\mathrm{S}_{\alpha\beta^*\gamma^*}$; et, pour la forme $\mathrm{S}_{ij}{}^k$, les seules composantes non nulles sont du type $\mathrm{S}_{\alpha^*\beta}{}^{\gamma^*}$, $\mathrm{S}_{\alpha\beta^*}{}^{\gamma}$; pour une variété kählerienne $\mathrm{S} = 0$. De $\mathrm{D}_a \Phi^j{}_i = 0$, on déduit :

$$\nabla_a \Phi^j{}_i = \mathrm{S}^p{}_{ia} \Phi^j{}_p - \mathrm{S}^j{}_{pa} \Phi^p{}_i + (\mathrm{S}_{ia}{}^p + \mathrm{S}_{ai}{}^p)\Phi^j{}_p - (\mathrm{S}_{pa}{}^j + \mathrm{S}_{ap}{}^j)\Phi^p{}_i;$$

on en déduit, qu'en coordonnées locales complexes, les seules composantes non nulles du tenseur $\nabla_a \Phi^j{}_i$, sont données par

$$\nabla_\alpha \Phi^\beta{}_{\gamma^*} = -2i S_{\alpha\gamma^*}{}^\beta, \qquad \nabla_{\alpha^*} \Phi^{\beta^*}{}_\gamma = 2i S_{\alpha^*\gamma}{}^{\beta^*};$$

il en résulte, par un calcul direct, que les seules composantes non nulles du tenseur $\nabla_b \nabla_a \Phi^j_i$, sont données par :

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda^*} \nabla_\alpha \Phi^\beta{}_\gamma &= -2i \nabla_{\lambda^*} S_{\alpha\gamma}{}^\beta, & \nabla_\lambda \nabla_{\alpha^*} \Phi^\beta{}_\gamma &= 2i \nabla_\lambda S_{\alpha^*\gamma}{}^\beta, \\ \nabla_\lambda \nabla_\alpha \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i \nabla_\gamma S_{\alpha\gamma^*}{}^\beta, & \nabla_{\lambda^*} \nabla_\alpha \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i \nabla_{\lambda^*} S_{\alpha\gamma^*}{}^\beta, \\ \nabla_\lambda \nabla_{\alpha^*} \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i \nabla_\lambda S_{\alpha^*\gamma^*}{}^\beta, & \nabla_{\lambda^*} \nabla_{\alpha^*} \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i \nabla_{\lambda^*} S_{\alpha^*\gamma^*}{}^\beta \end{aligned}$$

avec les formules complexes conjuguées. Si nous supposons $\nabla S = 0$, on en déduit donc

$$\nabla_b \nabla_a \Phi^j{}_i = 0.$$

Si V est supposée de plus compacte, on sait [16] qu'il en résulte

$$\nabla_a \Phi^j{}_i = 0$$

alors, V est kählerienne.

Théorème. — *Toute variété hermitienne compacte vérifiant la condition* $\nabla S = 0$ *est kählerienne.*

CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS $\mathcal{C}_R$ SUR UN ESPACE A CONNEXION EUCLIDIENNE

Dans ce chapitre nous considérons des espaces à connexion euclidienne, c'est-à-dire des espaces riemanniens munis d'une connexion linéaire telle que la dérivée covariante du tenseur métrique dans cette connexion soit nulle. Auparavant nous indiquons quelques formules fondamentales valables pour une connexion linéaire quelconque et qui nous seront utiles dans la suite.

§ 12. — Formules fondamentales pour une connexion linéaire.

1° Soit V une variété différentiable munie d'une connexion linéaire quelconque (γ) définie par les formes ω_j^i qui, relativement à un co-repère (θ^i) s'expriment par

$$\omega_j^i = \gamma_{jr}^i \theta^r.$$

Les formes de torsion et de courbure sont données par

$$\Sigma^i = d\theta^i + \omega_r^i \wedge \theta^r,$$
$$\Omega^i{}_j = d\omega_j^i + \omega_r^i \wedge \omega_j^r,$$

on pose

$$\Sigma^i = - S^i{}_{kr} \theta^k \wedge \theta^r$$

et

$$\Omega^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l,$$

ces formes vérifient les identités de Bianchi

$$d\Sigma^i = \Omega^i{}_r \wedge \theta^r - \omega_r^i \wedge \Sigma^r,$$
$$d\Omega^i{}_j = \Omega^i{}_r \wedge \omega_j^r - \omega_r^i \wedge \Omega^r{}_j,$$

en coordonnées locales $\theta^i = dx^i$, et on pose $\omega^i_j = \Gamma^i_{jr}\, dx^r$, puisque $d(dx^r) = 0$, la formule définissant la torsion se réduit à

$$\Sigma^i = \omega^i_r \wedge dx^r$$

d'où

$$\Sigma^i = \Gamma^i_{kr}\, dx^k \wedge dx^r = -\frac{1}{2}(\Gamma^i_{kr} - \Gamma^i_{rk})\, dx^k \wedge dx^r,$$

le tenseur de torsion a pour composantes

$$S^i{}_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}).$$

Pour un tenseur quelconque on a l'identité de Ricci

$$\nabla_l \nabla_k t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} - \nabla_k \nabla_l t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = -\sum_s R^r{}_{i_s lk} t_{i_1 \dots r \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q}$$
$$+ \sum_s R^{j_s}{}_{rlk} t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots r \dots j_q} + 2S^r{}_{lk} \nabla_r t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q}.$$

2° Si $S^i{}_{jk}$ est le tenseur de torsion de la connexion (γ),

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j - S^i{}_{jk} \theta^j \wedge \theta^k,$$

on introduit la connexion $(\bar\gamma)$ dite connexion associée définie par la matrice des formes ϖ^i_j, telles que

$$\varpi^i_j = \omega^i_j - 2S^i{}_{jk}\theta^k$$

d'où

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \varpi^i_j + S^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k.$$

La torsion de $(\bar\gamma)$ est opposée à celle de (γ), la relation entre les deux connexions est réciproque. Si les connexions sont rapportées à un repère naturel de coordonnées locales, leurs coefficients sont liés par

$$\bar\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - 2S^i{}_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Nous désignerons par $\bar R$ le tenseur de courbure de la connexion $\bar\gamma$ et par ∇ et $\bar\nabla$ les dérivations covariantes dans ces deux connexions.

3° On a immédiatement :

(12-1) $$\bar\nabla_l X^i = \nabla_l X^i - 2S^i{}_{rl} X^r,$$

(12-2) $$\bar\nabla_l X_i = \nabla_l X_i + 2S^r{}_{il} X_r,$$

plus généralement

$$(12\text{-}3) \qquad \overline{\nabla}_l A^i_j = \nabla_l A^i_j + 2(-S^i_{rl}A^r_j + S^r_{jl}A^i_r).$$

Par un calcul direct, on obtient

$$(12\text{-}4) \qquad \overline{\nabla}_k\nabla_l X_i - \nabla_l\overline{\nabla}_k X_i = [R^r_{ilk} + 2\nabla_l S^r_{ki}]X_r,$$
$$(12\text{-}5) \qquad \overline{\nabla}_k\nabla_l X^i - \nabla_l\overline{\nabla}_k X^i = -[R^i_{rlk} + \nabla_l S^i_{kr}]X^r.$$

En écrivant l'égalité déduite de (12-4) en permutant l et k et les connexions, on en déduit, pour tout X la relation

$$[R^r_{ilk} + 2\nabla_l S^r_{ki} + \overline{R}^r_{ikl} + 2\overline{\nabla}_k S^r_{il}]X_r = 0$$

d'où

$$(12\text{-}7) \qquad R^r_{ilk} = \overline{R}^r_{ilk} + 2[\nabla_l S^r_{ik} + \overline{\nabla}_k S^r_{li}].$$

4° La première identité de Bianchi s'écrit en coordonnées locales

$$R^i_{rkl} + R^i_{klr} + R^i_{lrk} + 2(\partial_l S^i_{rk} + \partial_r S^i_{kl} + \partial_k S^i_{lr} + \Gamma^i_{sr}S^s_{kl} + \Gamma^i_{sk}S^s_{lr} + \Gamma^i_{sl}S^s_{rk}) = 0$$

d'où

$$(12\text{-}8) \qquad R^i_{rkl} + R^i_{klr} + R^i_{lrk} + 2(\nabla_r S^i_{kl} + \nabla_k S^i_{lr} + \nabla_l S^i_{rk}) - 4(S^i_{sk}S^s_{lr} + S^i_{sl}S^s_{rk} + S^i_{sr}S^s_{kl}) = 0,$$

la deuxième identité de Bianchi s'écrit :

$$\partial_r R^i_{jkl} + \partial_k R^i_{jlr} + \partial_l R^i_{jrk} - \Gamma^s_{jr}R^i_{skl} - \Gamma^s_{jk}R^i_{slr} - \Gamma^s_{jl}R^i_{srk} + \Gamma^i_{sr}R^s_{jkl} + \Gamma^i_{sk}R^s_{jlr} + \Gamma^i_{sl}R^s_{jrk} = 0$$

d'où

$$(12\text{-}9) \qquad \nabla_r R^i_{jkl} + \nabla_k R^i_{jlr} + \nabla_l R^i_{jrk} = 2(S^s_{rk}R^i_{jsl} + S^s_{kl}R^i_{jsr} + S^s_{lr}R^i_{jsk}).$$

De (12-7) on déduit

$$(12\text{-}10) \qquad \overline{R}^i_{rlk} = R^i_{rlk} + 2(\nabla_l S^i_{kr} + \nabla_k S^i_{rl}) - 4(S^i_{sr}S^s_{lk} + S^i_{sl}S^s_{kr} + S^i_{sk}S^s_{rl})$$

et, en comparant avec (12-8)

$$(12\text{-}11) \qquad \overline{R}^i_{rlk} + R^i_{krl} + R^i_{lkr} = 2\nabla_r S^i_{kl}$$

(12-10) peut s'écrire, en introduisant $\overline{\nabla}_r S^i_{kl}$

$$(12\text{-}12) \qquad \overline{R}^i_{rlk} = R^i_{rlk} + 2(\nabla_l S^i_{kr} + \nabla_k S^i_{rl} - \nabla_r S^i_{lk} + \overline{\nabla}_r S^i_{lk}).$$

De la comparaison de (12-7) et (12-12) on déduit

$$(12\text{-}13) \qquad \nabla_k S^i{}_{lr} + \nabla_r S^i{}_{kl} = \overline{\nabla}_k S^i{}_{rl} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{kl}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\nabla_k S^i{}_{rl} + \nabla_r S^i{}_{kl} = \overline{\nabla}_k S^i{}_{rl} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{kl}.$$

5° Si $\nabla S = 0$, les formules précédentes se simplifient, on a en effet :

$$(12\text{-}14) \qquad \nabla_k \overline{\nabla}_l A^i{}_j - \overline{\nabla}_l \nabla_k A^i{}_j = R^i{}_{rkl} A^r{}_j - R^r{}_{jkl} A^i{}_r$$

$$(12\text{-}15) \qquad R^r{}_{ilk} = \overline{R}^r{}_{ilk} + 2\overline{\nabla}_k S^r{}_{li},$$

$$(12\text{-}16) \qquad R^i{}_{rkl} + R^i{}_{klr} + R^i{}_{lrk} - 4(S^i{}_{sk} S^s{}_{lr} + S^i{}_{sl} S^s{}_{rk} + S^i{}_{sr} S^s{}_{kl}) = 0,$$

$$(12\text{-}17) \qquad \overline{R}^i{}_{rlk} + R^i{}_{krl} + R^i{}_{lkr} = 0,$$

$$(12\text{-}18) \qquad \overline{\nabla}_k S^i{}_{lr} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{lk} = 0$$

de cette dernière relation on déduit que le tenseur $\overline{\nabla}_k S^i{}_{lr}$ est antisymétrique par rapport aux 3 indices k, l, r. Toujours dans l'hypothèse $\nabla S = 0$, on a

$$\nabla_p \overline{\nabla}_k S^r{}_{li} = 0$$

d'où

$$(12\text{-}19) \qquad \nabla_p R^r{}_{ilk} = \nabla_p \overline{R}^r{}_{ilk}$$

et
$$R^i{}_{skr} S^s{}_{lj} - R^s{}_{lkr} S^i{}_{sj} - R^s{}_{jkr} S^i{}_{ls} = 0.$$

Enfin, si nous supposons que S est à dérivée covariante nulle dans les deux connexions, on a

$$(12\text{-}20) \qquad \overline{R}^r{}_{ilk} = R^r{}_{ilk}$$

et
$$S^i{}_{sk} S^s{}_{lr} + S^i{}_{sl} S^s{}_{rk} + S^i{}_{sr} S^s{}_{kl} = 0,$$

et on a la première identité de Bianchi habituelle.

Supposons qu'il existe sur V une métrique définie par un tenseur symétrique g_{ij} et, supposons de plus, hypothèse que nous serons amenés à faire par la suite S_{ijk} antisymétrique par rapport aux trois indices i, j, k (nous dirons plus brièvement : S complètement antisymétrique). On a alors, toujours avec l'hypothèse $\nabla S = 0$

$$(12\text{-}21) \qquad S^s{}_{ij} R_{krsl} + S^s{}_{jl} R_{krsi} + S^s{}_{li} R_{krsj} = 0$$

et dans ce cas la deuxième identité de Bianchi se réduit à l'identité ordinaire.

§ 13. — Connexion euclidienne. Définition. Exemple.

1° Nous allons maintenant considérer une variété munie d'une métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

et d'une connexion euclidienne (ε) dont les coefficients seront notés E^i_{jk} le tenseur de courbure E (composantes $E^i{}_{jkl}$) le tenseur de torsion S et la dérivation covariante relativement à cette connexion D. Nous noterons ($\bar{\varepsilon}$) la connexion associée définie par

$$\overline{E}^i_{jk} = E^i_{kj}$$

par $\overline{E}$ son tenseur de courbure et par $\overline{D}$ son opérateur de dérivation covariante. Sur V la métrique définit la connexion riemannienne (γ) dont les coefficients seront notés Γ^i_{jk}, le tenseur de courbure R et la dérivation covariante ∇.

2° Avant de passer au cas général, nous allons considérer l'exemple d'un espace de groupe de transformations semi-simple, simplement transitif où se trouvent réalisées des hypothèses que nous serons amenés à faire par la suite.

Soit V_n une variété sur laquelle opère de manière simplement transitive un groupe semi-simple. Les vecteurs $\xi^i_\alpha (i = 1, \ldots n, \alpha = 1, \ldots r;\ r$ ordre du groupe) définissant les transformations infinitésimales du groupe vérifient la relation fondamentale :

$$(13\text{-}1) \qquad [\xi_\alpha, \xi_\beta]^i = C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi^i_\gamma$$

où les $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ sont les constantes de structure, ce sont les composantes d'un tenseur dans l'algèbre de Lie du groupe, vérifiant l'identité de Jacobi

$$(13\text{-}2) \qquad C^\delta{}_{\beta\gamma}C^\varepsilon{}_{\alpha\delta} + C^\delta{}_{\gamma\alpha}C^\varepsilon{}_{\beta\delta} + C^\delta{}_{\alpha\beta}C^\varepsilon{}_{\gamma\delta} = 0$$

on sait que, pour les groupes semi-simples compacts, la forme quadratique définie par le tenseur dans l'algèbre de Lie

$$g_{\alpha\beta} = C^\varepsilon{}_{\alpha\delta}C^\delta{}_{\varepsilon\beta}$$

est définie positive. Il existe un tenseur 2 fois contravariant $g^{\alpha\beta}$ tel que

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

et,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta}C^{\delta}{}_{\beta\gamma}$$

est un tenseur antisymétrique.

Puisque le groupe est supposé localement transitif, la matrice (ξ^i_α) est de rang n. Si nous définissons g^{ij} par

$$g^{ij} = \xi^i_\alpha \xi^j_\beta g^{\alpha\beta}$$

la matrice (g^{ij}) est définie positive, et il existe une matrice définie positive g_{ij}, vérifiant

$$g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i.$$

Nous définissons sur V_n une métrique riemannienne par la forme quadratique $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ et nous utiliserons g_{ij} et g^{ij} pour abaisser et élever les indices latins et $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ pour abaisser et élever les indices grecs. Considérons

$$\xi^\alpha_i = g^{\alpha\beta}g_{ij}\xi^j_\beta$$

on a

$$\xi^i_\alpha \xi^\alpha_j = \xi^i_\alpha g^{\alpha\beta} g_{jk}\xi^k_\beta = g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j.$$

Le groupe étant supposé simplement transitif $r = n$, et on a aussi

$$\xi^i_\alpha\, \xi^\beta_i = \delta^\beta_\alpha.$$

Sur V_n se trouve définie, d'une part la connexion riemannienne (γ), d'autre part une connexion (ε) dont les coefficients sont donnés par

$$E^i_{jk} = \xi^i_\alpha \partial_j \xi^\alpha_k = -\xi^\alpha_k \partial_j \xi^i_\alpha,$$

et la connexion associée $(\bar{\varepsilon})$, on vérifie immédiatement que ces deux connexions sont euclidiennes. Le tenseur de torsion de la connexion (ε) est donné par

$$S^i{}_{lk} = \frac{1}{2}(E^i_{lk} - E^i_{kl}) = \frac{1}{2}C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi^i_\gamma \xi^\alpha_k \xi^\beta_l.$$

Ses composantes covariantes S_{ilk} sont antisymétriques par rapport aux trois indices. La connexion symétrique associée

à la connexion (ε), coïncide avec la connexion riemannienne

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}(E^i_{jk} - \overline{E}^i_{jk})$$

De la relation (13-1), on déduit, en multipliant par ξ^α_k et en sommant en α

$$\partial_k \xi^i_\beta + \xi^j_\beta E^i_{jk} = C^\gamma{}_{\alpha\beta} \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k$$

soit

$$D_k \xi^i_\beta = C^\gamma{}_{\alpha\beta} \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k.$$

En partant de

$$\xi^\alpha_k = g^{\alpha\lambda} g_{ik} \xi^i_\lambda$$

on a

$$D_j \xi^\alpha_k = g^{\alpha\lambda} g_{ik} D_j \xi^i_\lambda$$

d'où on déduit

$$D_j \xi^\alpha_k = C^\alpha{}_{\mu\delta} \xi^\mu_k \xi^\delta_j.$$

Par un calcul direct, on obtient

$$\overline{D}_k \xi^i_\beta = 0$$

et, puisque la connexion $(\overline{\varepsilon})$ est euclidienne

$$\overline{D}_k \xi^\beta_l = 0.$$

Nous avons déjà vu que le tenseur de torsion est complètement antisymétrique, d'autre part, on a

$$\nabla_j S^i{}_{lk} = \frac{1}{2} C^\gamma{}_{\alpha\beta} [\nabla_j \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k \xi^\beta_l + \xi^i_\gamma \nabla_j \xi^\alpha_k \xi^\beta_l + \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k \nabla_j \xi^\beta_l]$$

d'où on déduit, en utilisant l'identité de Jacobi

$$\nabla_j S^i{}_{lk} = 0.$$

De l'expression même de S et de

$$\overline{D}_k \xi^i_\beta = \overline{D}_k \xi^\beta_l = 0$$

il résulte

$$\overline{D}_j S^i{}_{lk} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad D_j S^i{}_{lk} = 0.$$

Le tenseur de torsion est à dérivée covariante nulle dans les 3 connexions. On sait que si $DS = 0$

$$D_k \overline{D}_l \xi^i_\alpha - \overline{D}_l D_k \xi^i_\alpha = E^i{}_{rkl} \xi^r_\alpha$$

or

$$\overline{D}_l \xi^i_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad D_k \xi^i_\alpha = C^\gamma{}_{\lambda\alpha} \xi^i_\gamma \xi^\lambda_k$$

entraînent

$$\overline{D}_l D_k \xi^i_\alpha = 0$$

d'où

$$E^i{}_{rkl} \xi^r_\alpha = 0$$

et puisque $|\xi^r_\alpha| \neq 0$, il en résulte

$$E^i{}_{rlk} = 0.$$

Pour la connexion riemannienne, celle-ci coïncidant avec la connexion symétrique associée à la connexion (ε) on a

$$E^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + S^i{}_{jk}.$$

Le tenseur de courbure de la connexion (ε) étant nul, on a

$$R^i{}_{jkl} + \nabla_l S^i{}_{jk} - \nabla_k S^i{}_{jl} + S^s{}_{jk} S^i{}_{sl} - S^s{}_{jl} S^i{}_{sk} = 0$$

d'où on déduit, d'après la relation

$$\nabla_l S^i{}_{jk} = S^p{}_{jk} S^i{}_{lp} + S^p{}_{kl} S^i{}_{jp} + S^p{}_{lj} S^i{}_{kp} = 0,$$
$$R^i{}_{jkl} = S^s{}_{kl} S^i{}_{sj},$$

ce qui entraîne

$$\nabla R = DR = \overline{D}R = 0.$$

3° Reprenons maintenant, sur un espace riemannien quelconque une connexion euclidienne (ε), les notations étant celles du début du paragraphe, de

(13-3) $$D_h g_{jk} = 0$$

on déduit

$$E^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i{}_{jk}$$

avec

$$T^i{}_{jk} = S^i{}_{jk} + S_{jk}{}^i + S_{kj}{}^i$$

d'où

(13-4) $$E^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} + \nabla_l T^i{}_{jk} - \nabla_k T^i{}_{jl} + T^s{}_{jk} T^i{}_{sl} - T^s{}_{jl} T^i{}_{sk}.$$

D'autre part

(13-5) $$\overline{D}_l g_{jk} = D_l g_{jk} - 2(S_{klj} + S_{jlk})$$

d'où il résulte que la connexion $(\bar{\varepsilon})$ est aussi euclidienne, si et seulement si le tenseur de torsion est complètement anti-

symétrique, hypothèse que nous ferons dans tout cet alinéa. La connexion symétrique associée à la connexion (ε) coïncide avec la connexion riemannienne, on a alors pour tout vecteur ξ

$$\mathfrak{L}(\xi)g_{ij} = \overline{\mathrm{D}}_i\xi_j + \overline{\mathrm{D}}_j\xi_i = \mathrm{D}_i\xi_j + \mathrm{D}_j\xi_i = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i.$$

Les tenseurs de courbure de (ε) et $(\overline{\varepsilon})$ vérifient les relations

$$(13\text{-}6) \qquad \mathrm{E}_{ijkl} = -\mathrm{E}_{jikl} = -\mathrm{E}_{ijlk}.$$

Si on suppose de plus $\nabla\mathrm{S} = 0$ ou $\mathrm{DS} = 0$ il en résulte

$$(13\text{-}7) \qquad \mathrm{E}_{ijkl} = \mathrm{E}_{klij}$$

dans la première hypothèse ce résultat se déduit immédiatement de (13-4), et, dans la deuxième il suffit d'utiliser (12-17). Si nous supposons $\mathrm{DS} = \overline{\mathrm{D}}\mathrm{S} = 0$, ce qui entraîne $\nabla\mathrm{S} = 0$ et

$$\mathrm{S}^s{}_{jk}\mathrm{S}^i{}_{sl} - \mathrm{S}^s{}_{jl}\mathrm{S}^i{}_{sk} = \mathrm{S}^r{}_{kl}\mathrm{S}^i{}_{jr}$$

(13-4) s'écrit alors

$$(13\text{-}8) \qquad \mathrm{E}^i{}_{jkl} = \mathrm{R}^i{}_{jkl} + \mathrm{S}^r{}_{kl}\mathrm{S}^i{}_{jr}.$$

4° De (13-3) on déduit, comme dans le cas d'une connexion riemannienne

$$\mathrm{E}^i_{ih} = \frac{1}{2}\frac{\partial_h g}{g}$$

et, si S est complètement antisymétrique

$$\mathrm{E}^i_{ih} = \overline{\mathrm{E}}^i_{ih}.$$

Du tenseur de courbure de (ε) on déduit, par contraction, le tenseur

$$\mathrm{E}_{jk} = g^{mn}\mathrm{E}_{mjkn}$$

que nous appellerons tenseur de Ricci de la connexion (ε). On peut aussi en déduire le tenseur

$$\mathrm{F}_{jk} = g^{mn}\mathrm{E}_{jmkn}$$

si S est complètement antisymétrique

$$\mathrm{F}_{jk} = -\mathrm{E}_{jk}.$$

5° Soit ξ un vecteur quelconque, si S est complètement

antisymétrique et $DS = 0$, on a, d'après (12-14) par un calcul direct

$$D_k\mathcal{L}(\xi)\, g_{aj} + \overline{D}_j\mathcal{L}(\xi)\, g_{ak} - D_a\mathcal{L}(\xi)\, g_{jk} = 2D_k\overline{D}_j\xi_a + (E^r{}_{akj} + E^r{}_{jak} + E^r{}_{kaj})\, \xi_r.$$

Si on suppose de plus $\overline{D}S = 0$, on sait que les deux courbures sont égales, E vérifie la première identité de Bianchi ordinaire, on en déduit alors :

$$(13\text{-}9) \quad \frac{1}{2} g^{ia}(D_k\mathcal{L}(\xi)\, g_{aj} + \overline{D}_j\mathcal{L}(\xi)\, g_{ak} - D_a\mathcal{L}(\xi)\, g_{jk}) = D_k\overline{D}_j\xi^i + \xi^r E^i{}_{jrk} = \mathcal{L}(\xi)\, E^i_{jk}.$$

§ 14. — Transformations affines.

1° Nous considérons maintenant les transformations τ_E définies comme au n° 4, mais à partir du tenseur de courbure de la connexion (ε), de ses dérivées covariantes et des géodésiques de la connexion riemannienne.

Supposons les transformations τ_E affines pour la connexion (ε).

$$(\mathcal{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = (\partial_a\mathcal{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = (\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = (\partial_a\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0$$

entraînent les égalités tensorielles :

$$(14\text{-}1) \quad S^i{}_{sk}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn} + S^i{}_{js}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn} - S^s{}_{jk}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^i{}_{smn} = 0.$$

$$(14\text{-}2) \quad \nabla_s S^i{}_{jk}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{amn} + \nabla_a S^i{}_{sk}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn} + \nabla_a S^i{}_{js}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn} - \nabla_a S^s{}_{jk}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^k{}_{smn} = 0.$$

$$(14\text{-}3) \quad E^i{}_{skl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn} + E^i{}_{jsl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn} + E^i{}_{jks}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{lmn} - E^s{}_{jkl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^i{}_{smn}.$$

$$(14\text{-}4) \quad \nabla_s E^i{}_{jkl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{rmn} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn}\nabla_r E^i{}_{skl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn}\nabla_r E^i{}_{jsl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^s{}_{lmn}\nabla_r E^i{}_{jks} - \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}E^i{}_{smn}\nabla_r E^s{}_{jkl} = 0.$$

En considérant les transformations $\overset{0}{\tau}_E$ et $\overset{1}{\tau}_E$, on obtient

$$\nabla_s S^i{}_{jk}E^s{}_{amn} = 0$$
$$\nabla_s E^i{}_{jkl}E^s{}_{amn} = 0$$

d'où, si le tenseur $F^j{}_k = E^{jl}{}_{kl}$ vérifie $|F^j{}_k| \neq 0$, c'est-à-dire, dans

le cas où S est complètement antisymétrique, si la courbure de Ricci de la connexion (ε) est non dégénérée, alors

$$\nabla S = \nabla E = 0$$

ce qui d'après (13-4) entraîne

$$\nabla R = 0.$$

Considérons maintenant les transformations $\overset{1}{\tau}_E$ et $\overset{2}{\tau}_E$, on déduit de (14-3) et (14-4), comme au paragraphe 5

$$\nabla_a E^q{}_{bmn} \nabla_q E^i{}_{jkl} = 0.$$

Si nous supposons de plus $\nabla S = 0$, le tenseur E vérifie, comme le tenseur R la deuxième identité de Bianchi, les dérivées covariantes étant prises relativement à la connexion riemannienne, les calculs du paragraphe 5 sont valables ici.

Théorème. — *Soit sur un espace riemannien* V *une connexion euclidienne* (ε). *Si pour la connexion* (ε) *la courbure de Ricci est non dégénérée et si les transformations* $\overset{0}{\tau}_E$, $\overset{1}{\tau}_E$ *sont affines, alors* $\nabla S = \nabla E = \nabla R = 0$. *Si* V *est proprement riemanienne et* $\nabla S = 0$ *et si les transformations* $\overset{1}{\tau}_E$, $\overset{2}{\tau}_E$ *sont affines alors* $\nabla E = \nabla R = 0$.

2° Nous allons maintenant considérer les transformations définies par le tenseur E $\left(\text{nous les noterons } \overset{0}{T}\right)$, par les tenseurs DE, $\overline{D}$E $\left(\text{nous les noterons } \overset{1}{T}\right)$, par les tenseurs DDE, $\overline{D}\overline{D}$E, $\overline{D}$DE, D$\overline{D}$E $\left(\text{nous les noterons } \overset{2}{T}\right)$, etc... Les calculs sont effectués en coordonnées normales relativement à la connexion euclidienne. Supposons les transformations T affines; en remarquant que

$$(\overline{E}^s_{qj})_0 = -(S^s{}_{qj})_0$$

et, en utilisant la relation (12-3) pour le tenseur S, l'on voit que

$$(\mathfrak{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = (\partial_a \mathfrak{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = 0,$$

entraînent, en considérant $\overset{0}{T}$ et $\overset{1}{T}$, l'égalité tensorielle

$$(D_q S^i{}_{jk} + \overline{D}_q S^i{}_{jk}) E^q{}_{rmn} = 0,$$

d'où on déduit, si la courbure de Ricci de la connexion (ε) est non dégénérée

$$D_q S^i{}_{jk} + \overline{D}_q S^i{}_{jk} = 0;$$

si S est complètement antisymétrique ceci entraîne $\nabla S = 0$.

De même

$$(\mathcal{L}(\xi) E^i{}_{jkl})_0 = (\partial_a \mathcal{L}(\xi) E^i{}_{jkl})_0 = 0,$$

entraînent

$$\left(D_q E^i{}_{jkl} + \overline{D}_q E^i{}_{jkl}\right) E^q{}_{amn} = 0,$$

et, avec les mêmes hypothèses sur la courbure de Ricci

$$D_q E^i{}_{jkl} + \overline{D}_q E^i{}_{jkl} = 0.$$

En considérant maintenant les transformations $\overset{1}{T}$ et $\overset{2}{T}$ on obtient

$$(14\text{-}5) \quad \left(D_a E^q{}_{bmn} + \overline{D}_a E^q{}_{bmn}\right)\left(D_q E_{ijkl} + \overline{D}_q E_{ijkl}\right) = 0.$$

Si on suppose $DS = \overline{D}S = 0$, on sait que $E = \overline{E}$, et la deuxième identité de Bianchi permet alors d'écrire

$$D_r E_{ijkl} + \overline{D}_r E_{ijkl} + D_k E_{ijlr} + \overline{D}_k E_{ijlr} + D_l E_{ijrk} + \overline{D}_l E_{ijrk} = 0$$

on déduit alors de (14.5)

$$\left(D^a E^{qbmn} + \overline{D}^a E^{qbmn}\right)\left(D_a E_{qbmn} + \overline{D}_a E_{qbmn}\right) = 0,$$

d'où, si la métrique est définie positive

$$D_a E_{qbmn} + \overline{D}_a E_{qbmn} = 0$$

et si S est complètement antisymétrique $\nabla E = 0$.

THÉORÈME. — *Soit sur une variété riemannienne* V, *une connexion euclidienne* (ε). *Si, pour la connexion* (ε) *la courbure de Ricci est non dégénérée et si les transformations* $\overset{0}{T}_E$, $\overset{1}{T}_E$ *sont affines, alors* $DS + \overline{D}S = DE + \overline{D}E = 0$. *Si* V *est proprement riemannienne, et* $DS = \overline{D}S = 0$ *et si les transformations* $\overset{1}{T}_E$, $\overset{2}{T}_E$ *sont affines,* $DE + \overline{D}E = 0$.

§ 15. — Transformations conformes.

Pour un espace riemannien V muni d'une connexion euclidienne satisfaisant aux conditions $DS = \overline{D}S = 0$, S, complètement antisymétrique, nous allons étudier le cas où les transformations associées au tenseur E sont conformes. Pour un vecteur ξ quelconque on a par un calcul direct

$$\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl} = D_k(\mathcal{L}(\xi)E)^i_{jl} - D_l(\mathcal{L}(\xi)E)^i_{jk} - 2S^p{}_{kl}(\mathcal{L}(\xi)E)^i_{jp}$$

mais, avec les hypothèses faites sur S on peut utiliser la relation (13-6). Si la tranformation définie par le vecteur ξ est conforme

$$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = -\frac{2}{n}\delta\xi g_{ij} \tag{15-1}$$

d'où

$$D_k\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = -\frac{2}{n}(\partial_k\delta\xi)g_{ij} = \overline{D}_k\mathcal{L}(\xi)g_{ij} \tag{15-2}$$

alors

$$\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl} = \frac{1}{n}\{D_l(\partial_j\delta\xi)\delta^i_k - D_k(\partial_j\delta\xi)\delta^i_l + g^{ia}[g_{jl}D_k(\partial_a\delta\xi) - g_{jk}D_l(\partial_a\delta\xi)]\}$$
$$+ \frac{2}{n}S^p{}_{kl}[(\partial_p\delta\xi)\delta^i_j + (\partial_j\delta\xi)\delta^i_p - g^{ia}(\partial_a\delta\xi)g_{jp}].$$

On a d'autre part, par suite de l'antisymétrie du tenseur E, $\partial_i\xi^i = 0$, donc, à l'origine des coordonnées normales

$$(\partial_a\delta\xi)_0 = -(\Gamma^i_{hi}\partial_a\xi^h)_0 = 0.$$

On a alors

$$(\nabla_b\partial_a\delta\xi)_0 = (\partial_{ab}\delta\xi)_0 = -(\partial_a\Gamma^i_{hi}\Omega^h{}_b + \partial_b\Gamma^i_{hi}\Omega^h{}_a)_0.$$

Il en résulte que si V est espace d'Einstein pour la connexion riemannienne, on a

$$(\partial_{ab}\delta\xi)_0 = 0.$$

Dans ce cas (15-1) entraîne

$$(\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0$$

comme dans le cas de la connexion riemannienne, on voit que (15-1) entraîne aussi

$$(\partial_c\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0.$$

Nous avons donc les équations du paragraphe précédent.

Théorème. — *Soit* V *un espace riemannien muni d'une connexion euclidienne* (ε), *satisfaisant aux hypothèses suivantes :* $DS = \overline{D}S = 0$, S *complètement antiymétrique*, V *espace d'Einstein pour la connexion riemannienne. Si pour la connexion* (ε), *la courbure de Ricci est non dégénérée et si les transformations* $\overset{0}{\tau}_{\mathrm{E}}$, $\overset{1}{\tau}_{\mathrm{E}}$ $\left(ou\ \overset{0}{\mathrm{T}}_{\mathrm{E}}, \overset{1}{\mathrm{T}}_{\mathrm{E}}\right)$ *sont conformes alors* $\nabla \mathrm{E} = \nabla \mathrm{R} = 0$. *Si* V *est proprement riemannien et si les transformations* $\overset{1}{\tau}_{\mathrm{E}}$, $\overset{2}{\tau}_{\mathrm{E}}$ $\left(ou\ \overset{1}{\mathrm{T}}_{\mathrm{E}}, \overset{2}{\mathrm{T}}_{\mathrm{E}}\right)$ *sont conformes*; $\nabla \mathrm{E} = \nabla \mathrm{R} = 0$.

§ 16. — Invariance de l'élément de volume.

1° On sait que dans l'hypothèse $DS = \overline{D}S = 0$, S complètement antisymétrique, le tenseur de courbure de la connexion vérifie les mêmes relations que celui de la connexion riemannienne, on peut donc reprendre les calculs du paragraphe 7; donc, si les transformations $\overset{2}{\tau}_{\mathrm{E}}$ conservent l'élément de volume, on a :

$$D_m \overline{D}_n A^s_{sa_1 \ldots a_p} - \overline{D}_n D_m A^s_{sa_1 \ldots a_p} = 0.$$

Si les transformations $\overset{0}{\tau}_{\mathrm{E}}$, $\overset{1}{\tau}_{\mathrm{E}}$ conservent l'élément de volume et si la courbure de Ricci de la connexion (ε) est non dégénérée, le tenseur de Ricci de (γ) est à dérivée covariante nulle dans cette même connexion.

2° Les transformations $\mathfrak{T}$ considérées ici sont définies à partir du tenseur E, et de ses dérivées covariantes dans la connexion (ε) et des géodésiques de la connexion riemannienne. Remarquons d'une part que de

$$E^i_{jk} = 2S^i_{kj} + E^i_{kj}$$

on déduit, en utilisant la complète antisymétrie de S, $E^i_{ik} = E^i_{ki}$; d'autre part, la relation $\partial_r g = 2g\Gamma^i_{ir}$ est valable en coordonnées locales arbitraires, si nous l'écrivons en coordonnées normales relativement à la connexion euclidienne, l'antisymétrie de S entraîne :

$$E^i_{ji} = \Gamma^i_{ji}, \qquad \text{d'où} \qquad \partial_r g = 2gE^i_{ir}.$$

Il en résulte que, comme pour la connexion riemannienne, l'invariance de l'élément de volume par les transformations $\mathcal{T}_E$ entraîne les équations :

$$E^p_{imn}A^s_{spj} + E^p_{jmn}A^s_{sip} = 0 \tag{16-1}$$
$$E^p_{imn}A^s_{spjk} + E^p_{jmn}A^s_{sipk} + E^p_{kmn}A^s_{sijp} = 0 \tag{16-2}$$
$$D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p_{imn}A^s_{spj} + D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p_{jmn}A^s_{sip} = 0 \tag{16-3}$$
$$D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p_{imn}A^s_{spjk} + D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p_{jmn}A^s_{sipk} + D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p_{kmn}A^s_{sijp} = 0 \tag{16-4}$$

où les A sont les tenseurs normaux relativement à la connexion euclidienne. Afin d'expliciter ces relations, nous sommes amenés à calculer les composantes des tenseurs normaux de la connexion euclidienne. Nous employons la méthode indiquée au paragraphe 3.

Partant des équations de structure

$$\left\{\begin{aligned} d\theta^i &= -\omega^i_r\wedge\theta^r - S^i_{kr}\theta^k\wedge\theta^r \\ d\omega^i_j &= -\omega^i_r\wedge\omega^r_j + \frac{1}{2}E^i_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l \end{aligned}\right. \tag{16-5}$$

et, posant

$$\mathcal{A}^i_{uk} = -2(S^i_{uk})_0, \qquad \mathcal{B}^i_{juk} = (E^i_{juk})_0$$
$$\mathcal{C}^i_{uvk} = (E^i_{uvk} + 4S^i_{hu}S^h_{kv})_0, \qquad \mathcal{D}^i_{juvk} = 2(D_vE^i_{juk} + E^i_{juh}S^h_{kv})_0$$
$$\mathcal{E}^i_{uvwk} = 2[D_vE^i_{wuk} + E^i_{wuh}S^h_{kv} + S^i_{hw}E^h_{uvk} + 4S^i_{lw}S^l_{hu}S^h_{kv}]_0.$$

On obtient, en coordonnées normales d'origine O, le développement de E^i_{jk}

$$\begin{aligned} E^i_{jk} = {}& \frac{1}{2}\mathcal{A}^i_{kj} \\ &+ \left[\frac{1}{2}\mathcal{B}^i_{juk} + \frac{1}{4}\mathcal{A}^p_{kj}\mathcal{A}^i_{up} + \frac{1}{6}(\mathcal{C}^i_{ukj} + \mathcal{C}^i_{kuj})\right]x^u \\ &+ \left[\frac{1}{4}\mathcal{A}^q_{uj}\mathcal{B}^i_{qvk} + \frac{1}{4}\mathcal{A}^i_{up}\mathcal{B}^p_{jvk} + \frac{1}{6}\mathcal{D}^i_{juvk} + \frac{1}{12}\mathcal{A}^p_{kj}\mathcal{C}^i_{uvp}\right. \\ &\left. + \frac{1}{12}\mathcal{A}^i_{up}(\mathcal{C}^p_{vkj} + \mathcal{C}^p_{kvj}) + \frac{1}{24}(\mathcal{E}^i_{kuvj} + \mathcal{E}^i_{ukvj} + \mathcal{E}^i_{uvkj})\right]x^u x^v \end{aligned} \tag{16-6}$$

d'où on peut déduire les composantes des tenseurs normaux $(\partial_a E^i_{jk})_0$, $(\partial_{ab}E^i_{jk})_0$. Nous aurons besoin dans la suite des termes $(\partial_a E^i_{hi})_0$ et $(\partial_{ab}E^i_{hi})_0$.

On a

$$(\partial_a E^i_{hi})_0 = \frac{1}{2}\mathcal{B}^i_{hai} + \frac{1}{4}\mathcal{A}^p_{ih}\mathcal{A}^i_{ap} + \frac{1}{6}(\mathcal{C}^i_{aih} + \mathcal{C}^i_{iah})$$

d'où

$$(\partial_a E^i_{hi})_0 = \frac{1}{3}(E_{ah} + S^p_{hi}S^i_{pa}) \tag{16-7}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}(\partial_{ab}E^i_{hk})_0 = \frac{1}{4}[\mathcal{A}^q_{ah}\mathcal{B}^i_{qbk} + \mathcal{A}^q_{bh}\mathcal{B}^i_{qak}] + \frac{1}{4}[\mathcal{A}^i_{ap}\mathcal{B}^p_{hbk} + \mathcal{A}^i_{bp}\mathcal{B}^p_{hak}]\\ + \frac{1}{6}(\mathcal{D}^i_{habk} + \mathcal{D}^i_{hbak}) + \frac{1}{12}\mathcal{A}^p_{kh}(\mathcal{C}^i_{abp} + \mathcal{C}^i_{bap})\\ + \frac{1}{12}[\mathcal{A}^i_{ap}(\mathcal{C}^p_{bkh} + \mathcal{C}^p_{kbh}) + \mathcal{A}^i_{bp}(\mathcal{C}^p_{akh} + \mathcal{C}^p_{kah})]\\ + \frac{1}{24}[\mathcal{E}^i_{kabh} + \mathcal{E}^i_{kbah} + \mathcal{E}^i_{akbh} + \mathcal{E}^i_{bkah} + \mathcal{E}^i_{abkh} + \mathcal{E}^i_{bakh}];\end{aligned}$$

en contractant i et k ces différents termes donnent :

$$\frac{1}{2}(S^q_{ha}E_{qb} + S^q_{hb}E_{qa}), \quad \frac{1}{2}(S^i_{pa}E^p_{hbi} + S^i_{pb}E^p_{hai}),$$

$$\frac{1}{3}[D_bE_{ha} + S^p_{ib}E^i_{hap} + D_aE_{hb} + S^p_{ia}E^i_{hbp}],$$

$$\frac{1}{6}S^p_{hi}[E^i_{apb} + E^i_{bap} + 4(S^i_{qa}S^q_{pb} + S^i_{qb}S^q_{pa})],$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\{S^i_{pa}[E^p_{bih} + E^p_{ibh} + 4(S^p_{qb}S^q_{hi} + S^p_{qi}S^q_{hb})]\\ + S^i_{pb}[E^p_{aih} + E^p_{iah} + 4(S^p_{qa}S^q_{hi} + S^p_{qi}S^q_{ha})]\}\\ + \frac{1}{12}\{- D_aE_{bh} - E_{bp}S^p_{ha} + S^i_{pb}E^p_{iah} + 4S^i_{qb}S^q_{pi}S^p_{ha}\\ - D_bE_{ah} - E_{ap}S^p_{hb} + S^i_{pa}E^p_{ibh} + 4S^i_{qa}S^q_{pi}S^p_{hb} + D_iE^i_{bah}\\ + S^p_{hi}E^i_{bap} + S^i_{pb}E^p_{aih} + 4S^i_{qb}S^q_{pa}S^p_{hi} + D_iE^i_{abh} + S^p_{hi}E^i_{abp}\\ + S^i_{pa}E^p_{bih} + 4S^i_{qa}S^q_{pb}S^p_{hi}\},\end{aligned}$$

$(\partial_{ab}E^i_{hi})_0$ peut donc s'écrire comme la somme de trois séries de termes

$$\alpha)\quad \frac{1}{2}(S^q_{ha}E_{qb} + S^q_{hb}E_{qa}) + \frac{1}{3}(D_bE_{ha} + D_aE_{hb})$$

$$+ \frac{1}{12}(- D_aE_{bh} - E_{bp}S^p_{ha} - D_bE_{ah} - E_{ap}S^p_{hb} + D_iE^i_{bah} + D_iE^i_{abh}),$$

$$\beta)\qquad \underset{(a,\,b)}{S}\left\{\frac{1}{2}\,S^i{}_{pa}E^p{}_{hbi}+\frac{1}{3}\,S^p{}_{ia}E^i{}_{hbp}+\frac{1}{6}\,S^i{}_{pa}[E^p{}_{bih}+E^p{}_{ibh}]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}\,S^i{}_{pa}(E^p{}_{ibh}+E^p{}_{bih})\right\}$$

où $\underset{(a,\,b)}{S}$ indique la somme de termes analogues obtenus en permutant a et b.

En nous plaçant dans l'hypothèse $DS=\overline{D}S=0$, on a la première identité de Bianchi ordinaire, le terme considéré s'écrit alors :

$$\underset{(a,\,b)}{S}\,\frac{19}{12}\,S^i{}_{pa}E^p{}_{hbi}.$$

$$\gamma)\qquad \underset{(a,\,b)}{S}\,\frac{5}{3}\,S^i{}_{pa}S^p{}_{qb}S^q{}_{hi}+S^i{}_{pa}S^p{}_{qi}S^q{}_{hb},$$

mais, en utilisant (12-20), on voit que ce terme peut s'écrire

$$\underset{(a,\,b)}{S}\,\frac{11}{3}\,S^i{}_{pa}S^p{}_{qb}S^q{}_{hi}.$$

Finalement, nous obtenons en tenant compte de l'antisymétrie de S

$$(\partial_{ab}E^i_{hi})_0=\underset{(a,\,b)}{S}\left[\frac{1}{2}\,S^q{}_{ha}E_{qb}+\frac{1}{3}\,D_bE_{ha}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}\,(-D_aE_{bh}-E_{bp}S^p{}_{ha}+D_iE^i{}_{abh})+\frac{19}{12}\,S^i{}_{pa}E^p{}_{hbi}\right].$$

En utilisant la première identité de Bianchi, on obtient facilement :

$$S^i{}_{pa}E^p{}_{hbi}=-\frac{1}{2}\,S^i{}_{pa}E^p{}_{ihb},$$

de (12-21) on déduit, par contraction :

$$(16\text{-}8)\qquad S^s{}_{rk}E_{js}+S^s{}_{ki}E^i{}_{jsr}+S^s{}_{ir}E^i{}_{jsk}=0,$$

d'autre part, de l'expression de $D_rE^i{}_{jkl}-\overline{D}_rE^i{}_{jkl}$, on déduit, en contractant r et i

$$(16\text{-}9)\qquad D_iE^i{}_{jkl}-\overline{D}_iE^i{}_{jkl}=2(S^p{}_{ji}E^i{}_{pkl}+S^p{}_{ki}E^i{}_{jpl}+S^p{}_{li}E^i{}_{jkp})$$

et, par soustraction de (16-8) et (16-9)

$$S^p{}_{ji}E^i{}_{pkr}=E_{jp}S^p{}_{rk}+\frac{1}{2}\left(D_iE^i{}_{jkr}-\overline{D}_iE^i{}_{jkr}\right)$$

d'où

$$(16\text{-}10)\quad (\partial_{ab}E^{i}_{hi})_0$$
$$= \underset{(a,\, b)}{S}\left[\frac{1}{6}D_aE_{hb} + \frac{1}{12}D_hE_{ab} - \frac{3}{8}S^p_{ha}E_{bp} + \frac{19}{48}(D_iE^i_{ahb} - \overline{D}_iE^i_{ahb})\right],$$

mais, d'après les hypothèses faites sur S, on a pour D et $\overline{D}$ les identités de Bianchi, d'où on déduit

$$D_iE^i_{ahb} = D_bE_{ah} - D_hE_{ab},$$

de même

$$\overline{D}_iE^i_{ahb} = \overline{D}_bE_{ah} - \overline{D}_hE_{ab}$$
$$= D_bE_{ah} - D_hE_{ab} + 2(S^p_{ab}E_{ph} + S^p_{hb}E_{ap} - S^p_{ah}E_{pb} - S^p_{bh}E_{ap}),$$

finalement

$$(16\text{-}11)\quad A^s_{shab} = \underset{(a,\, b)}{S}\left[\frac{1}{6}D_aE_{hb} + \frac{1}{12}D_hE_{ab} - \frac{11}{4}S^p_{ha}E_{bp}\right],$$

Dans l'hypothèse $DS = 0$, (16-1) est équivalente à :

$$\left(D_m\overline{D}_n - \overline{D}_nD_m\right)A^s_{sij} = 0$$

or, d'après l'expression de A^s_{sij}, cette relation se réduit à

$$(16\text{-}12)\qquad E^p_{imn}E_{pj} + E^p_{jmn}E_{pi} = 0,$$

en utilisant (16-3) pour $q = 1$, on a :

$$(16\text{-}13)\qquad E^p_{imn}D_kE_{pj} + E^p_{jmn}D_kE_{pi} = 0.$$

(16-2) Compte tenu de (16-12) et (16-13) s'écrit

$$(16\text{-}14)\quad E^p_{imn}D_pE_{jk} + E^p_{jmn}D_pE_{ki} + E^p_{kmn}D_pE_{ij} = 0.$$

On a donc les mêmes relations que dans le cas riemannien, on en déduit alors

$$(16\text{-}15)\qquad E^p_{\ n}D_pE_{jk} = 0.$$

Considérons maintenant l'équation (16-3) pour $q = 1$ et pour $q = 2$ et le tenseur $S^q_{is}S^s_{qj}$, on a

$$D_m\overline{D}_nS^q_{is}S^s_{qj} - \overline{D}_nD_mS^q_{is}S^s_{qj} = -\,(E^p_{imn}S^q_{ps}S^s_{qj} + E^p_{jmn}S^q_{is}S^s_{qp}) = 0,$$

d'où on déduit

$$D_{a_1}\ldots D_{a_l}E^p_{imn}S^q_{ps}S^s_{qj} + D_{a_1}\ldots D_{a_l}E^p_{jmn}S^q_{is}S^s_{qp} = 0$$

Les équations (16-3) se réduisent donc à

$$(16\text{-}16) \qquad D_r E^p{}_{imn} E_{pj} + D_r E^p{}_{jmn} E_{pi} = 0,$$
$$(16\text{-}17) \qquad D_{kr} E^p{}_{imn} E_{pj} + D_{kr} E^p{}_{jmn} E_{pi} = 0,$$

(16-4) pour $q = 1$, s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}[D_r E^p{}_{imn}(D_j E_{pk} + D_k E_{pj} + D_p E_{jk}) \\ + D_r E_{pjmn}(D_p E_{ik} + D_k E_{ip} + D_i E_{pk}) \\ + D_r E^p{}_{kmn}(D_j E_{ip} + D_p E_{ij} + D_i E_{jp})] \\ -\frac{11}{4}[D_r E^p{}_{imn}(S^q{}_{pj} E_{kq} + S^q{}_{pk} E_{jq}) + D_r E^p{}_{jmn}(S^q{}_{ip} E_{kq} + S^q{}_{ik} E_{pq}) \\ + D_r E^p{}_{kmn}(S^q{}_{ij} E_{pq} + S^q{}_{ip} E_{jq})] = 0.\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième identité de Bianchi, on peut écrire

$$S^q{}_{pj} E^p{}_{imn} + S^q{}_{ip} E^p{}_{jmn} = S^p{}_{ij} E^q{}_{pmn}$$

et, par dérivation covariante

$$S^q{}_{pj} D_r E^p{}_{imn} + S^q{}_{ip} D_r E^p{}_{jmn} = S^p{}_{ij} D_r E^q{}_{pmn}.$$

Le deuxième crochet s'écrit donc

$$\begin{aligned}E_{kq} S^p{}_{ij} D_r E^q{}_{pmn} + E_{jq} S^p{}_{ik} D_r E^q{}_{pmn} + E_{qp}(S^p{}_{ik} D_r E^q{}_{jmn} + S^p{}_{ij} D^r E^q{}_{kmn}) \\ = S^p{}_{ij}(E_{qk} D_r E^q{}_{pmn} + E_{pq} D_r E^q{}_{kmn}) + S^p{}_{ik}(E_{jq} D_r E^q{}_{pmn} \\ + E_{pq} D_r E^q{}_{jmn}) = 0\end{aligned}$$

d'après (16-16), (16-4) se réduit donc à :

$$\begin{aligned}D_r E^p{}_{imn}(D_j E_{pk} + D_k E_{pj} + D_p E_{jk}) \\ + D_r E^p{}_{jmn}(D_p E_{ik} + D_k E_{ip} + D_i E_{pk}) \\ + D_r E^p{}_{kmn}(D_j E_{ip} + D_p E_{ij} + D_i E_{jp}) = 0.\end{aligned}$$

Nous avons donc les mêmes équations que dans le cas riemannien, on en déduit alors

$$D^k E^{ip} D_k E_{ip} = 0.$$

THÉORÈME. — *Soit sur un espace riemannien* V *une connexion euclidienne* (ε) *vérifiant les hypothèses suivantes :* $DS = \overline{D}S = 0$, S *complètement antisymétrique. Si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_E$ *conservent l'élément de volume, on a le système infini de relations :*

$$D_m \overline{D}_n A^s{}_{sa_1 \ldots a_p} - \overline{D}_n D_m A^s{}_{sa_1 \ldots a_p} = 0.$$

Si la courbure de Ricci de la connexion (ε) *est non dégénérée* (*resp. si* V *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_E$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_E$ (*resp.* $\overset{1}{\mathfrak{T}}_E$, $\overset{2}{\mathfrak{T}}_E$) *conservent le volume, le tenseur de Ricci de la connexion* (ε) *est à dérivée covariante nulle.*

DEUXIÈME PARTIE

Transformations infinitésimales projectives et conformes.

CHAPITRE PREMIER

TRANSFORMATIONS PROJECTIVES ET TRANSFORMATIONS CONFORMES SUR UN ESPACE DE RIEMANN COMPACT OU COMPLET

§ 17. — *p*-formes conformes sur un espace riemannien compact.

Soit ξ un vecteur conforme sur un espace riemannien V_n, on déduit de (2-9), par contraction, en utilisant pour le tenseur de courbure la normalisation de YANO-BOCHNER [27].

$$\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = Q\xi \tag{17-1}$$

où d et δ sont les opérateurs de différentiation et de co-différentiation, et Δ le laplacien de G. DE RHAM

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

et Q l'opérateur de Ricci, c'est-à-dire l'opérateur qui à la 1-forme ξ_i, fait correspondre la 1-forme :

$$2R_{ij}\xi^j.$$

Réciproquement, si V_n est compact orientable, (17-1) est une condition suffisante pour que le vecteur ξ soit conforme ([13], p. 128). Dans ce cas, il n'existe pas de vecteur conforme vérifiant la relation

$$R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$$

à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement

$$R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$$

en particulier, si la courbure de Ricci est partout définie négative, il n'existe pas de vecteur conforme non nul ([27, p. 54). Dans le cas d'un espace d'Einstein compact orientable V_n $(n > 2)$

$$2R_{ij} = \lambda_1 g_{ij}, \qquad (\lambda_1 > 0),$$

on a le résultat suivant : ([13], p. 138) : les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les 1-formes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à λ_1 $\left(\text{resp. } \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}\right)$. Les 1-formes caractéristiques co-fermées correspondant à λ_1, engendrent l'algèbre de Lie L_1 des 1-formes isométriques, et les 1-formes correspondant à la valeur propre λ_2, engendrent l'espace L_2 des 1-formes conformes pures (différentielles des fonctions solution de l'équation $\Delta\varphi = \lambda_2\varphi$), et, on a

$$[L_1, L_2] \subset L_2 \quad \text{et} \quad [L_2, L_2] \subset L_1,$$

Si ξ est un vecteur conforme et si on associe à la géodésique $x^i(s)$ (où s est l'arc), la fonction

$$f = \xi_i \frac{dx^i}{ds},$$

on a

$$\frac{df}{ds} = \Phi \quad \left(\Phi = \frac{1}{n}\nabla_i\xi^i\right),$$

donc $\dfrac{df}{ds}$ dépend uniquement du point considéré et non de la direction de la géodésique passant par ce point.

Plus généralement, si nous considérons maintenant un tenseur antisymétrique $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ et si nous supposons que $\dfrac{d}{ds}\left(\xi_{ii_1 \ldots i_p}\dfrac{dx^i}{ds}\right)$ en un point donné dépend seulement du point et non de la direction de la géodésique $x^i(s)$ passant par ce point, nous en déduisons :

(17-2) $$\nabla_j\xi_{ii_2 \ldots i_p} + \nabla_i\xi_{ji_2 \ldots i_p} = 2\theta_{i_2 \ldots i_p} g_{ij}$$

avec

$$\theta_{i_2\ldots i_p} = \frac{1}{n}\nabla_r\xi^r{}_{i_1 i_2\ldots i_p}.$$

Un tel tenseur est dit conforme et la p-forme associée sera dite p-forme conforme.

En posant :

$$F(\xi_{i_1\ldots i_p}) = R_{ij}\xi^{ii_2\ldots i_p}\xi^j{}_{i_2\ldots i_p} + \frac{p-1}{2}R_{ijkl}\xi^{iji_3\ldots i_p}\xi^{kl}{}_{i_3\ldots i_p},$$

on sait ([27], p. 73) que si l'espace de Riemann V est compact, orientable, il n'existe pas de p-forme conforme vérifiant

$$F(\xi_{i_1\ldots i_p}) \leqslant 0$$

à moins qu'elle soit à dérivée covariante nulle, et alors nécessairement

$$F(\xi_{i_1\ldots i_p}) = 0$$

en particulier, si la forme $F(\xi_{i_1\ldots i_p})$ est définie négative, alors, il n'existe pas de p-forme conforme non nulle. Plaçons-nous maintenant dans le cas où il existe de telles p-formes. Nous noterons Q_p, l'opérateur qui au tenseur de composantes $\xi_{i_1\ldots i_p}$ fait correspondre le tenseur $Q_p(\xi)$ dont les composantes sont données par :

$$(Q_p\xi)_{i_1\ldots i_p} = \sum_{s=1}^{p} R^l{}_{i_s}\xi_{i_1\ldots i_{s-1}li_{s+1}\ldots i_p} + \sum_{s<t}^{1\ldots p} R^{lm}{}_{i_s i_t}\xi_{i_1\ldots i_{s-1}li_{s+1}\ldots i_{t-1}mi_{t+1}\ldots i_p}.$$

Partons de la relation

$$\begin{aligned}(17\text{-}3)\quad & \nabla^l\nabla_l\xi_{i_1\ldots i_p} - g^{jk}\nabla_k(\nabla_j\xi_{i_1i_2\ldots i_p} - \nabla_{i_1}\xi_{ji_2\ldots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p}\xi_{i_1i_2\ldots i_{p-1}j})\\ & - (\nabla_{i_1}\nabla_r\xi^r{}_{i_2\ldots i_p} - \nabla_{i_2}\nabla_r\xi^r{}_{i_1i_3\ldots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p}\nabla_r\xi^r{}_{i_2\ldots i_{p-1}i_1}) = (Q_p\xi)_{i_1\ldots i_p}.\end{aligned}$$

De (17-2) on déduit

$$\begin{aligned} p\nabla_j\xi_{i_1i_2\ldots i_p} &+ \nabla_{i_1}\xi_{ji_2\ldots i_p} + \nabla_{i_2}\xi_{i_1ji_3\ldots i_p} + \cdots + \nabla_{i_p}\xi_{i_1i_2\ldots i_{p-1}j}\\ &= \frac{2}{n}[g_{i_1j}\nabla_r\xi^r{}_{i_2\ldots i_p} - g_{i_2j}\nabla_r\xi^r{}_{i_1\ldots i_p} - \cdots - g_{i_pj}\nabla_r\xi^r{}_{i_2\ldots i_{p-1}j}].\end{aligned}$$

(17-3) devient alors

$$\begin{aligned}(17\text{-}4)\quad -p\nabla_l\nabla^l\xi_{i_1\ldots i_p} + \left(\frac{2}{n}-1\right)[\nabla_{i_1}\nabla_r\xi^r{}_{i_2\ldots i_p} - \nabla_{i_2}\nabla_r\xi^r{}_{i_1i_3\ldots i_p} - \cdots\\ - \nabla_{i_p}\nabla_r\xi^r{}_{i_2\ldots i_{p-1}i_1}] = (Q_p\xi)_{i_1\ldots i_p}\end{aligned}$$

et, en utilisant la relation

$$\nabla_l \nabla^l \xi_{i_1 \dots i_p} = (-\Delta\xi + Q_p \xi)_{i_1 \dots i_p}$$

on voit que (17-4) peut s'écrire :

$$(17\text{-}5) \qquad p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = (p + 1)\, Q_p \xi.$$

Nous allons voir maintenant que cette relation caractérise les p-formes conformes sur un espace riemannien compact. Nous noterons

$$A\xi = p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi - (p + 1)\, Q_p \xi.$$

Considérons le tenseur

$$\alpha_{i_1 \dots i_p l} = p\left(\nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} + \nabla_{i_1} \xi_{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} g_{i_1 l} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p}\right)$$

et la 1-forme

$$\beta_l = \xi^{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p l}$$

(,) désignant le produit scalaire local, on a, par un calcul direct

$$\nabla_l \beta^l + (A\xi, \xi)$$
$$= p\left[\nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} \nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} + \nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} \nabla_{i_1} \xi_{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} \nabla_l \xi^{l i_2 \dots i_p} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p}\right]$$

ou

$$(17\text{-}6) \quad \nabla_l \beta^l + (A\xi, \xi) = \frac{p}{2}\left(\nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} + \nabla^{i_1} \xi^{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} g^{i_1 l} \xi^{r i_2 \dots i_p}\right)$$
$$\left(\nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} + \nabla_{i_1} \xi_{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} g_{i_1 l} \xi_{r i_2 \dots i_p}\right).$$

Il résulte de cette dernière relation, par intégration sur la variété Vn compacte orientable que toute p-forme solution de (17-5) est conforme.

Théorème. — *Sur un espace proprement riemannien* Vn, *compact orientable, une p-forme est conforme, si, et seulement si elle est solution de l'équation*

$$p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = (p + 1)\, Q_p(\xi).$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où Q_p est défini positif (c'est-à-dire, pour tout tenseur ξ, $(Q_p(\xi), \xi) > 0$), et reprenons la relation (17-6) que nous pouvons écrire :

$$\delta\beta = \left(\left[p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi - (p+1) Q_p(\xi)\right], \xi\right) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha).$$

Si λ est une valeur propre de Δ qui correspond à une p-forme co-fermée sur V_n, (17-6) se réduit à

$$\text{(17-7)} \quad \delta\beta = ([p\lambda\xi - (p+1)Q_p(\xi)], \xi) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha).$$

Par intégration sur V_n, on en déduit que si λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $(p+1)\, Q_p$ sur les p-formes co-fermées, on a nécessairement

$$p\lambda \geqslant \lambda_1.$$

Nous allons maintenant considérer les p-formes fermées, on remarque d'abord que (17-6) peut s'écrire, sous la forme équivalente

$$\delta\beta = \left(\left[\left(p + 1 - \frac{2}{n}\right)\Delta\xi - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\delta d\xi - (p+1)Q_p(\xi)\right], \xi\right) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha).$$

Soit μ une valeur propre de Δ correspondant à une p-forme fermée, alors

$$\text{(17-8)} \quad \delta\beta = \left(\left[\left(p + 1 - \frac{2}{n}\right)\mu\xi - (p+1)Q_p(\xi)\right], \xi\right) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha)$$

on en déduit

$$\mu \geqslant \frac{\lambda_1}{p + 1 - \dfrac{2}{n}}.$$

THÉORÈME. — *Sur une variété riemannienne compacte orientable, où l'opérateur Q_p est défini positif en tout point, si λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $(p+1)\, Q_p$ sur*

les p-formes, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à

$$\frac{\lambda_1}{p}\left(\textit{resp.}\ \frac{\lambda_1}{p+1-\frac{2}{n}}\right).$$

Supposons maintenant l'espace V_n à courbure constante

$$R_{ijkl}=\frac{R}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il}-g_{jl}g_{ik}),\qquad R_{jk}=\frac{R}{n}g_{jk}$$

alors

$$(Q_p\xi)_{i_1\dots i_p}=\frac{pR(n-p)}{n(n-1)}\xi_{i_1\dots i_p}.$$

Nous supposons toujours $F(\xi_{i_1\dots i_p})>0$, on sait qu'alors il n'existe pas de p-forme harmonique non nulle ([27], p. 64), toute p-forme se décompose d'une manière unique suivant

$$\xi=\zeta+\omega,$$

où ζ est cohomologue à 0 et ω homologue à 0. D'autre part, dans le cas d'un espace à courbure constante, si ξ est une p-forme conforme, on a

$$\text{(17-9)}\qquad p\Delta\xi+\left(1-\frac{2}{n}\right)d\delta\xi=K_1\xi$$

avec
$$K_1=\frac{Rp(p+1)(n-p)}{n(n-1)};$$

on a d'autre part,

$$\Delta(\zeta+\omega)=\delta d\zeta+d\delta\omega,$$

(17.9) devient

$$p\delta\, d\zeta+\left(p+1-\frac{2}{n}\right)d\delta\omega=K_1(\zeta+\omega)$$

et, on en déduit

$$\text{(17-10)}\qquad p\Delta\zeta=K_1\zeta\quad(\delta\zeta=0)$$

$$\text{(17-11)}\qquad \Delta\omega=K_2\omega\quad(d\omega=0)\quad\text{avec}\quad K_2=\frac{K_1}{p+1-\frac{2}{n}}.$$

De (17-10), il résulte que ζ est une p-forme de Killing, de (17-11), on déduit

$$\Delta\delta\omega = K_2\delta\omega,$$

réciproquement, si ω' est une (p-1)-forme solution de (17-11), on peut lui associer la p-forme $\omega = \frac{1}{K_2}\omega'$ solution de (17-11), la correspondance biunivoque entre les formes ω et ω' est donnée par $\omega' = \delta\omega$ et $\omega = \frac{1}{K_2}\omega'$, les formes ω solutions de (17-11) définissent des p-formes conformes que nous appellerons suivant LICHNEROWICZ ([13], p. 137) conformes pures. On voit alors que l'espace vectoriel L des p-formes conformes est la somme directe $L = L_1 + L_2$ où L_1 est l'espace vectoriel des p-formes de Killing et L_2 l'espace vectoriel des p-formes conformes pures.

THÉORÈME. — *Sur un espace proprement riemannien, compact orientable, à courbure constante, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes co-fermées* (*resp. fermées*) *sont supérieures ou égales à*

$$K_1 = \frac{Rp(p+1)(n-p)}{n(n-1)} \quad \left(\text{resp. } K_2 = \frac{K_1}{p+1-\dfrac{2}{n}}\right).$$

Les formes co-fermées correspondant à K_1 *sont des formes de Killing, les formes fermées correspondant à* K_2 *sont des formes conformes pures. L'espace vectoriel* L *des formes conformes est somme directe des espaces vectoriels* L_1 *et* L_2 *des formes de Killing et des formes conformes pures. Les projecteurs de* L *sur* L_1 *et* L_2 *sont respectivement* δd *et* $d\delta$.

§ 18. — Transformations affines sur un espace complet.

Soit ξ un vecteur affine sur un espace riemannien V_n, associons à ce vecteur et à la géodésique $x^i(s)$ (où s est l'arc), la fonction

$$f = \xi_i \frac{dx^i}{ds}$$

de l'équation différentielle des géodésiques

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

on déduit

$$\frac{df}{ds} = \nabla_k\xi_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \qquad \frac{d^2f}{ds^2} = \nabla_k\nabla_j\xi_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

et, d'après (1.2)

$$\frac{d^2f}{ds^2} = -\mathrm{R}_{ijkl}\xi^l\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

d'où

$$f = \left(\frac{df}{ds}\right)_0 s + f_0 = (\nabla_j\xi_i\theta^i\theta^j)_0\, s + (\xi_i\theta^i)_0$$

θ étant le vecteur tangent en 0 à la géodésique considérée. Supposons V_n complet, alors s peut prendre toute valeur de 0 à $+\infty$; si le vecteur ξ est de longueur bornée, il en est de même de la fonction f, ce qui entraîne nécessairement

$$(\nabla_j\xi_i\theta^i\theta^j)_0 = 0,$$

et, puisque cette relation est vérifiée en tout point 0 et pour toute géodésique issue de 0, en on déduit

$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 0.$$

Ce résultat a été démontré par Hano [6] par une autre méthode.

Théorème. — *Sur un espace riemannien complet, tout vecteur affine de longueur bornée est isométrique.*

§ 19. — Transformations projectives sur un espace compact.

Si ξ est un vecteur projectif sur un espace riemannien, on a, d'après (2-2) et (2-3)

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i + \mathrm{R}_{ijkp}\xi^p = \frac{1}{n+1}(g_{ij}\nabla_k\nabla_p\xi^p + g_{ik}\nabla_j\nabla_p\xi^p)$$

d'où, en contractant j et k

$$\nabla_l\nabla^l\xi_i + \mathrm{R}_{ip}\xi^p = \frac{2}{n+1}\nabla_i\nabla_p\xi^p$$

on a, d'autre part,

$$(\Delta\xi)_i = R_{ip}\xi^p - \nabla_l\nabla^l\xi_i$$

d'où

$$\Delta\xi - \frac{2}{n+1}d\delta\xi = Q\xi. \tag{19-1}$$

Supposons l'espace V compact orientable, $\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit scalaire global, de (19-1) on déduit

$$\langle\Delta\xi, \xi\rangle - \frac{2}{n+1}\langle d\delta\xi, \xi\rangle = \langle Q\xi, \xi\rangle \tag{19-2}$$

or, sur un espace compact orientable

$$\langle\Delta\xi, \xi\rangle = \langle d\xi, d\xi\rangle + \langle\delta\xi, \delta\xi\rangle$$

et

$$\langle d\delta\xi, \xi\rangle = \langle\delta\xi, \delta\xi\rangle$$

alors (19-2) s'écrit :

$$\langle d\xi, d\xi\rangle + \frac{n-1}{n+1}\langle\delta\xi, \delta\xi\rangle = \langle Q\xi, \xi\rangle \tag{19-3}$$

d'où si $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$ (19-3) entraîne

$$R_{ij}\xi^i\xi^j = 0 \quad \text{et} \quad d\xi = \delta\xi = 0.$$

De $\delta\xi = 0$, il résulte que ξ est affine, donc isométrique puisque V est compact, alors $d\xi = 0$ entraîne en plus $\nabla_i\xi_j = 0$. Nous obtenons donc le résultat suivant, analogue au résultat de YANO pour les vecteurs conformes,

THÉORÈME. — *Sur un espace de Riemann compact, orientable, il n'existe pas de vecteur projectif vérifiant $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$, à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement $R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$. Si la courbure de Ricci de l'espace est partout définie négative, il n'existe pas de vecteur projectif non nul.*

§ 20. — Décomposition des vecteurs projectifs et conformes.

Soit V_n une variété riemannienne complète, simplement connexe, on sait [23] que V_n peut être identifiée au produit topologique et riemannien de $(r+1)$ variétés riemanniennes $W^a (a = 0, 1, \ldots r)$, complètes simplement connexes, W^0 étant

euclidienne et $W^a (a \neq 0)$ irréductible, de dimension $\geqslant 2$. Nous désignerons par T l'espace fibré des vecteurs tangents à V_n et par T^a l'espace fibré des vecteurs tangents à W^a. Tout vecteur $X \in T$ est défini par $X = \{X_a\}$, où $X_a \in T^a$. La connexion riemannienne de V_n est définie par ses coefficients

$$\Gamma^i_{jk} = \{\Gamma^{i_a}_{j_a k_a}\}$$

où les $\Gamma^{i_a}_{j_a k_a}$ sont les coefficients de la connexion riemannienne de W^a.

Si ∇ est la dérivation covariante sur V_n et ∇_a la dérivation covariante sur W^a, on a

$$\text{(20-1)} \qquad \nabla_X Y = \sum_{a=0}^{r} \left(\nabla_{a X_a} Y_a + \sum_{a \neq b} [X_a, Y_b]_b\right).$$

De plus, R désignant le tenseur de courbure de V_n et R_a le tenseur de courbure de V_a, on a

$$\text{(20-2)} \qquad R(X, Y)Z = \sum_a R_a(X_a, Y_a)Z_a$$

(où $\nabla_X Y$ désigne le vecteur de composantes $\nabla_k Y^l X^k$ et $R(X, Y)Z$ le vecteur de composantes $R^i{}_{jkl} X^k Y^l Z^j$).

Soit ξ un vecteur projectif, il lui correspond, d'après (2-2) un vecteur ψ tel que, pour tout couple X, Y de vecteurs $\in T$, on ait

$$\nabla_X \nabla_Y(\xi) - \nabla_{\nabla_X Y}(\xi) + R(\xi, X)Y = (\psi, X)Y + (\psi, Y)X.$$

De (20-1) et (20-2) on déduit

$$\text{(20-3)} \qquad [\nabla_X \nabla_Y(\xi) - \nabla_{\nabla_X Y}(\xi) + R(\xi, X)Y]_a = \nabla_X \nabla_Y(\xi_a) - \nabla_{\nabla_X Y}(\xi_a) + R(\xi_a, X)Y.$$

D'autre part, de (20-1) on déduit

$$\nabla_{X_a} Y_a = \nabla_{a X_a} Y \in T^a$$

De plus, pour un champ de vecteurs Z tel que $Z_x \in T^a_x$ en chaque point x (où Z_x désigne le vecteur du champ associé au point x et T^a_x l'espace tangent au point x à la variété W^a_x), nous avons

$$\nabla_{X_a} Z = \nabla_{a X_a} Z$$

par suite :

$$(\nabla_{X_a}\nabla_{Y_a}(\xi) - \nabla_{\nabla_{X_a}Y_a}(\xi) + R(\xi, X_a)Y_a)_a = (\psi, X_a)Y_a + (\psi, Y_a)X_a,$$

soit

$$\begin{aligned}(20\text{-}4)\quad \nabla_{aX_a}\nabla_{aY_a}(\xi_a) - \nabla_{a\nabla_{aX_a}Y_a}(\xi_a) + R(\xi_a, X_a)Y_a \\ = (\psi, X_a)Y_a + (\psi, Y_a)X_a.\end{aligned}$$

Puisque, dans la décomposition de DE RHAM envisagée les sous-espaces T^a_x sont deux à deux orthogonaux on a

$$(\psi, X_a) = (\psi_a, X_a) \qquad \text{et} \qquad (\psi, Y_a) = (\psi_a, Y_a)$$

et (20-4) montre alors que le vecteur ξ_a est sur W^a_x un vecteur projectif.

Supposons maintenant que ξ est un vecteur conforme, on a alors, pour tout couple de vecteurs $X, Y \in T$,

$$(20\text{-}5)\qquad (\nabla_X\xi, Y) + (X, \nabla_Y\xi) = 2\Phi(X, Y),$$

écrivons (20-5) pour deux vecteurs $X_a, Y_a \in T^a$

$$(\nabla_{X_a}\xi, Y_a) + (X_a, \nabla_{Y_a}\xi) = 2\Phi(X_a, Y_a)$$

et, en utilisant l'orthogonalité deux à deux des T^a_x, en un point x et les relations

$$(\nabla_{X_a}\xi)_a = \nabla_{X_a}\xi_a = \nabla_{aX_a}\xi_a,$$

on peut écrire

$$(\nabla_{aX_a}\xi_a, Y_a) + (X_a, \nabla_{aY_a}\xi_a) = 2\Phi(X_a, Y_a)$$

c'est-à-dire que ξ_a est sur W^a_x un vecteur conforme.

Réciproquement, si on a sur chaque W^a, une transformation $\mathfrak{T}_a$,

$$x'_a = \mathfrak{T}_a(x_a),$$

il en résulte une transformation $\mathfrak{T}$ sur V^n définie par :

$$x' = \mathfrak{T}(x) = \{\mathfrak{T}_a(x_a)\}, \qquad \text{si} \qquad x = \{x_a\}$$

A la transformation $\mathfrak{T}$, correspond un vecteur $\xi = \{\xi_a\}$, ξ_a étant le vecteur correspondant à $\mathfrak{T}_a$, et on a

$$(\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \{(\mathfrak{L}(\xi_a)\Gamma)^{i_a}_{j_ak_a}\}.$$

Si les transformations $\mathfrak{T}_a$ sont projectives, pour chaque a, il existe un vecteur ψ_a tel que :

$$(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^{i_a}_{j_a k_a} = \delta^{i_a}_{j_a}\psi_{k_a} + \delta^{i_a}_{k_a}\psi_{j_a}.$$

Si on désigne par ψ le vecteur dont les composantes sur les W^a sont les vecteurs ψ_a, il en résulte que la transformation définie précédemment est une transformation projective.

En ce qui concerne les transformations conformes, nous avons montré que si ξ est un vecteur conforme, ses composantes ξ_a sur les différentes feuilles W^a sont des vecteurs conformes, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Si ξ est un vecteur conforme, on sait qu'il existe un vecteur ψ tel que

$$(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j - \psi^i g_{jk}. \tag{20-5}$$

Toute transformation infinitésimale (ξ) vérifiant (20-5) sera appelée collinéation conforme; de la même manière que dans le cas projectif, on voit que si les vecteurs ξ_a définissent des collinéations conformes, il en est de même du vecteur ξ. Ce sera un vecteur conforme si V^n est compact ([26], p. 278).

Théorème. — *Soit* $V^n = W^0 \times W^1 \times \cdots \times W^r$ *une variété riemannienne, simplement connexe, complète; soit* $\xi = \{\xi_a\}$ *un vecteur projectif (resp. conforme), la restriction de* ξ_a *sur chaque* W^a_x *est un vecteur projectif (resp. conforme).*

§ 21. — Endomorphismes associés à une transformation infinitésimale ([10], [20]).

Soit V une variété munie d'une connexion linéaire (γ) qui, rapportée à un système de coordonnées locales est définie par des coefficients Γ^i_{jk}, rappelons que la connexion linéaire $(\bar{\gamma})$ dite connexion associée est définie par les coefficients $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ donnés par

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

A toute transformation infinitésimale X définie sur V nous associons les tenseurs $\nabla_j X^i$ et $\bar{\nabla}_j X^i$ qui définissent en tout point des endomorphismes notés $\mathfrak{a}$ et $\bar{\mathfrak{a}}$ de l'espace vectoriel tangent en ce point.

Reprenons d'abord les résultats de Lichnerowicz ([13], p. 98). Soit χ une algèbre transitive de transformations affines sur une variété différentiable Vn munie d'une connexion linéaire. Soit t un tenseur quelconque, nous prendrons un tenseur t^i_j, les résultats s'étendent immédiatement à un tenseur d'ordre quelconque.

Considérons les trois propriétés suivantes :

a) Le tenseur t est à dérivée covariante nulle

$$\nabla_k t^i_j = 0.$$

b) Le tenseur t est invariant par χ

$$\mathfrak{L}(X)\, t^i_j = X^r \nabla_r t^i_j + t^i_r \overline{\nabla}_j X^r - t^r_j \overline{\nabla}_r X^i = 0.$$

c) Le tenseur t est invariant en un point particulier 0 par les endomorphismes $\overline{\mathfrak{A}}$

$$(A^i_j)_0 = (t^i_r \overline{\nabla}_j X^r - t^r_j \overline{\nabla}_r X^i)_0 = 0.$$

Nous allons montrer que deux quelconques de ces propriétés entraînent la troisième.

1° *a* et *b* entraînent évidemment *c*).

2° *b*) et *c*) entraînent

$$(X^r \nabla_r t^i_j)_0 = 0$$

et, par suite de la transitivité

$$(\nabla_r t^i_j)_0 = 0$$

mais d'autre part t est invariant par χ donc $\mathfrak{L}(X)t = 0$, de plus, les transformations de χ étant affines,

$$\nabla \mathfrak{L}(X)t - \mathfrak{L}(X)\nabla t = 0$$

ce qui montre que le tenseur ∇t est invariant par (χ), et, puisqu'il est nul en un point, il est nul en tout point.

3° Considérons maintenant *a*) et *c*), de $\nabla t = 0$ et de

$$\nabla_k \overline{\nabla}_j X^r = - R^r{}_{jkl} X^l$$

puisque (X) est affine, on déduit immédiatement

$$\nabla_k A^i_j = 0.$$

Le tenseur A^i_j nul en un point, est à dérivée covariante nulle, donc il est nul en tout point, alors

$$\mathfrak{L}(X) t^i_j = 0$$

t est invariant par (χ).

Soit maintenant sur une variété différentiable à connexion symétrique Γ^i_{jk}, (χ) une algèbre transitive de transformations projectives, à tout $X \in \chi$ est associé un vecteur φ, et on a

$$(\mathcal{L}(X)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j$$

t étant un tenseur t^i_j considérons les quatre propriétés suivantes :

a) t est à dérivée covariante nulle,

b) t est invariant par χ,

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes définis par les tenseurs

$$B^i_j = X^i\varphi_j, \qquad X \in \chi.$$

d) t est invariant en un point particulier 0 par les endomorphismes $\mathfrak{A}$.

1° a et b entraînent évidemment d, d'autre part, on a

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r\mathcal{L}(X)t^i_j = (\mathcal{L}(X)\Gamma)^i_{pr}t^p_j - (\mathcal{L}(X)\Gamma)^p_{jr}t^i_p = \delta^i_r\varphi_p t^p_j - \delta^p_r\varphi_j t^i_p$$

d'où

$$X^i\varphi_p t^p_j - X^p\varphi_j t^i_p = X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r\mathcal{L}(X)t^i_j,$$

il en résulte que a et b entraînent c.

2° Supposons vérifiées a, c et d et calculons $\nabla_k A^i_j$

$$\nabla_k A^i_j = t^i_r\nabla_k\nabla_j X^r - t^r_j\nabla_k\nabla_r X^i,$$

mais, en utilisant la définition de X

$$\nabla_k\nabla_j X^r = -R^r_{jkl}X^l + \delta^r_j\varphi_k + \delta^r_k\varphi_j,$$

on a, en tenant compte de a,

$$\nabla_k A^i_j = \delta^r_k t^i_r\varphi_j - \delta^i_k t^r_j\varphi_r,$$

d'où d'après c

$$X^k\nabla_k A^i_j = 0$$

et, par suite de la transitivité

$$\nabla_k A^i_j = 0$$

finalement, on voit que a, c et d entraînent b.

3° Considérons maintenant les propriétés b, c et d. De b et d il résulte

$$(\nabla_r t^i_j)_0 = 0$$

d'autre part

$$X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r\mathcal{L}(X)t^i_j) = X^r\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j = X^i\varphi_p t^p_j - X^p\varphi_j t^i_p,$$

donc en tenant compte de c et de la transitivité, on en déduit

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j = 0$$

d'où $\nabla_r t^i_j = 0$, b, c et d entraînent a.

THÉORÈME. — *Soit sur une variété différentiable munie d'une connexion linéaire symétrique, (χ) une algèbre transitive de transformations infinitésimales projectives; si un tenseur t vérifie trois des conditions suivantes, il vérifie la quatrième:*

a) *t est à dérivée covariante nulle,*

b) t est invariant par χ,

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{B}$,

d) t est invariant en un point par les endomorphismes $\mathcal{A}$.

Plus généralement considérons une variété différentiable munie d'une connexion linéaire quelconque et une algèbre transitive (χ) de transformations infinitésimales conservant les géodésiques. On sait ([24], p. 322) qu'à tout vecteur X définissant une telle transformation sont associés deux vecteurs φ et ψ tels que

$$(\mathcal{L}(X)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_k\varphi_j + \delta^i_j\psi_k.$$

Nous considérons maintenant pour un tenseur t quelconque les quatre propriétés suivantes:

a) t est à dérivée covariante nulle,

b) t est invariant par (χ),

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{B}$ définis par les tenseurs $B^i_j = X^i\varphi_j$, $X \in \chi$,

d) t est invariant en un point particulier 0 par les endomorphismes $\bar{\mathcal{A}}$.

En utilisant (1-2), un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où la connexion est sans torsion, montre alors que si t vérifie trois des conditions, il vérifie la quatrième.

Remarque. — Nous allons dans la suite considérer une variété riemannienne, par suite de la dualité définie par la métrique, on sait, d'après (2-3), que la 1-forme associée au vecteur φ est, à un facteur constant près égale à la 1-forme $d\delta X$, en désignant encore par X la 1-forme associée à la transformation infinitésimale X. Alors si (χ) est une algèbre transitive de transformations projectives pour la connexion riemannienne d'un espace de Riemann V, on peut énoncer le théorème précédent, en prenant pour ensemble $\mathcal{B}$ les endomorphismes

définis par les éléments du produit tensoriel $\chi \otimes d\delta\chi$. Soit maintenant, sur une variété riemannienne (χ) une algèbre transitive de transformations conformes

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 2\Phi g_{ij}$$

avec

$$\Phi = \frac{1}{n} \nabla_r X^r, \qquad \Phi_i = \frac{1}{n} \nabla_i \nabla_r X^r.$$

Considérons pour un tenseur t les quatre propriétés suivantes :

a) t est à dérivée covariante nulle,

b) t est invariant par χ.

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{C}$ en désignant par $\mathcal{C}$ tout endomorphisme défini par

$$C^i_j = X^i \varphi_j - \varphi^i X_j$$

(ou encore, on peut prendre les endomorphismes associés aux 2-formes

$$\chi \wedge d\delta\chi,$$

d) t est invariant en un point 0 par les endomorphismes $\mathcal{A}$.

1° a et b entraînent évidemment d. D'autre part, on a

$$(\mathcal{L}(X)\Gamma^i_{pr} = \delta^i_p \varphi_r + \delta^i_r \varphi_p - g_{pr}\varphi^i,$$

d'où

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r \mathcal{L}(X) t^i_j = \delta^i_r \varphi_p t^p{}_j - t_{rj}\varphi^i - t^i{}_r \varphi_j + g_{jr}\varphi^p t^i{}_p,$$

il en résulte

$$X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r \mathcal{L}(X) t^i_j) = t^i{}_r(\varphi^r X_j - X^r \varphi_j) - t^r{}_j(\varphi^i X_r - X^i \varphi_r)$$

et on voit alors que a et b entraînent c.

2° En notant toujours A^i_j le tenseur $t^i{}_r \nabla_j X^r - t^r{}_j \nabla_r X^i$ on a d'après a et la définition de X

$$\nabla_k A^i_j = t^i{}_k \varphi_j - t^i{}_r g_{jk} \varphi^r - t^r{}_j \delta^i_k \varphi_r + t_{kj}\varphi^i$$

d'où $\quad X^k \nabla_k A^i_j = - t^i{}_r(\varphi^r X_j - X^r \varphi_j) + t^r{}_j(\varphi^i X_r - X^i \varphi_r)$

alors c entraîne, en tenant compte de la transitivité

$$\nabla_k A^i_j = 0.$$

Si on suppose de plus que d est vérifiée, il en résulte $A^i_j = 0$ en tout point; c'est-à-dire que a, c et d entraînent b.

3° Prenons maintenant b, c et d, b et d entraînent

$$(\nabla_r t^i_j)_0 = 0.$$

On a d'autre part,

$$X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r \mathcal{L}(X) t^i_j) = t^i_r(\varphi^r X_j - X^r \varphi_j) - t^r_j(\varphi^i X_r - X^i \varphi_r)$$

b et c entraînent

$$X^r \mathcal{L}(X) \nabla_r t^i_j$$

d'où, par suite de la transitivité

$$\mathcal{L}(X) \nabla_r t^i_j = 0$$

et puisque $(\nabla_r t^i_j)_0 = 0$, il en résulte $\nabla_r t^i_j = 0$.

En définitive, on voit que b, c et d entraînent a.

Théorème. — *Soit sur une variété riemannienne,* (χ) *une algèbre transitive de transformations infinitésimales conformes; si un tenseur* t *vérifie trois des conditions suivantes, il vérifie la quatrième :*

a) *t est à dérivée covariante nulle,*

b) *t est invariant par χ,*

c) *t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{C}$.*

d) *t est invariant en un point par les endomorphismes $\mathcal{A}$*

CHAPITRE II

VECTEURS ET TENSEURS INVARIANTS SUR UN ESPACE HOMOGÈNE

Nous considérons maintenant un espace proprement riemannien homogène G/H, le but de ce chapitre est de montrer que certains des résultats obtenus par Bochner, Lichnerowicz, Yano [16, [19], [27], pour les tenseurs d'un espace proprement riemannien compact sont valables pour les tenseurs invariants définis sur l'espace G/H.

§ 22. — Dérivée covariante d'un tenseur invariant.

On sait [16] que sur un espace riemannien compact orientable, tout tenseur dont la dérivée covariante d'ordre p quelconque est nulle est à dérivée covariante nulle. Soit maintenant $\mathfrak{a}$ un tenseur G-invariant sur G/H. Le tenseur métrique g étant G-invariant,

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \frac{1}{p\,!}\mathfrak{a}^{i_1 \cdots i_p}\mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p}$$

est constant; on en déduit

$$\nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p}\mathfrak{a}^{i_1 \cdots i_p} = 0$$

$$\nabla_l \nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p}\mathfrak{a}^{i_1 \cdots i_p} + \nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p}\nabla_l \mathfrak{a}^{i_1 \cdots i_p} = 0$$

si $$\nabla_l \nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p} = 0$$

alors $$\nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p}\nabla_l \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p} = 0$$

d'où, par contraction

$$\nabla_l \mathfrak{a}_{i_1 \ldots i_p} = 0.$$

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène proprement riemannien G/H, si un tenseur G-invariant a une dérivée covariante d'ordre quelconque nulle, il est à dérivée covariante nulle.*

Nous pouvons appliquer ce résultat à un espace homogène hermitien, le tenseur $\Phi^i{}_j$ de la structure complexe est évidemment G-invariant, d'autre part au paragraphe 11, un calcul local nous a montré que $\nabla S = 0$ (où S est le tenseur de torsion de la deuxième connexion canonique) entraîne

$$\nabla_b \nabla_a \Phi^i{}_j = 0.$$

THÉORÈME. — *Tout espace homogène hermitien dont le tenseur de torsion est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne est un espace kählerien.*

§ 23. — Vecteurs harmoniques et vecteurs de Killing.

Soit ξ un vecteur quelconque, partons de

(23-1) $$(\Delta\xi)_i = R_{ip}\xi^p - \nabla_l \nabla^l \xi_i.$$

Si ξ est un vecteur G-invariant $g_{ij}\xi^i\xi^j$ est constant, donc

$$g_{ij}(\nabla_k \xi^i)\,\xi^j = 0$$

d'où on déduit, par dérivation et contraction

(23-2) $$(\nabla_l \nabla^l \xi_i)\,\xi^i = -\nabla_l \xi_i \nabla^l \xi^i$$

(23-1) donne alors :

(23-3) $$(\Delta\xi)_i \xi^i = R_{pi}\xi^p\xi^i + \nabla_l \xi_i \nabla^l \xi^i$$

un vecteur de Killing vérifie la relation

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0$$

d'où

(23-4) $$\nabla_l \nabla^l \xi_i + R_{pi}\xi^p = 0,$$

s'il est G-invariant, on en déduit, d'après (23-2)

(23-5) $$\nabla_l \xi_i \nabla^l \xi^i - R_{pi}\xi^p\xi^i = 0.$$

En utilisant (23-3) et (23-5) nous obtenons :

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène proprement riemannien* G/H, *il n'existe pas de vecteur* G-*invariant harmonique* (*resp. de Killing*) *vérifiant* $R_{ij}\xi^i\xi^j \geqslant 0$ (*resp.* $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$), *à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement* $R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$. *Si la courbure de Ricci est définie positive* (*resp. définie négative*) *il n'existe pas de vecteur harmonique* (*resp. de Killing*) G-*invariant non nul.*

Soit $\underline{G}$ l'algèbre de Lie de G, et X le champ de vecteurs de Killing de G/H correspondant à $\lambda \in \underline{G}$. Supposons X invariant par les transformations infinitésimales définies par G, alors pour tout $\mu \in \underline{G}$ on a

$$\mathfrak{L}_Y(X) = [X, Y] = 0$$

(où Y correspond à μ) donc $[\lambda, \mu] = 0$, c'est-à-dire que λ appartient au centre de $\underline{G}$. D'après le théorème précédent, on voit que si la courbure de Ricci est définie négative, le centre de $\underline{G}$ se réduit à 0. Si, par exemple on suppose de plus G réductif, il en résulte qu'il est semi-simple.

THÉORÈME. — *Soit* $V_n = G/H$ *un espace homogène riemannien, si la courbure de Ricci est définie négative, le centre de* $\underline{G}$ *est réduit à* 0.

§ 24. — Tenseurs harmoniques et tenseurs de Killing.

Pour un tenseur antisymétrique d'ordre p quelconque, on a

$$(24\text{-}1) \qquad (\Delta\xi)_{i_1 \dots i_p} = \sum_{s=1}^{p} R^l{}_{i_s}\xi_{i_1 \dots i_{s-1} l i_{s+1} \dots i_p} + \sum_{\substack{1 \dots p \\ s<t}} R^{lm}{}_{i_s i_t}\xi_{i_1 \dots i_{s-1} l i_{s+1} \dots i_{t-1} m i_{t+1} \dots i_p} - \nabla_l \nabla^l \xi_{i_1 \dots i_p}$$

Le tenseur ξ étant G-invariant $\xi_{i_1 \dots i_p}\xi^{i_1 \dots i_p}$ est constant, on en déduit, en dérivant deux fois et en contractant

$$\nabla_l \nabla^l \xi_{i_1 \dots i_p}\xi^{i_1 \dots i_p} + \nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p}\nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} = 0,$$

on déduit de (24-1), en utilisant toujours les notations de Bochner-Yano

$$F(\xi_{i_1\dots i_p}) = R_{ij}\xi^{ii_2\dots i_p}\xi^{j}{}_{i_2\dots i_p} + \frac{p-1}{2} R_{ijkl}\xi^{ijl_3\dots i_p}\xi^{kl}{}_{i_3\dots i_p}$$

$$(24\text{-}2) \quad (\Delta\xi)_{i_1\dots i_p}\xi^{i_p\dots i_p} = \nabla_l\xi_{i_1\dots i_p}\nabla^l\xi^{i_1\dots i_p} + pF(\xi_{i_1\dots i_p}).$$

Un tenseur de Killing d'ordre p est défini par la condition d'être antisymétrique et par une condition analogue à celle des vecteurs de Killing, à savoir que $\xi_{ii_2\dots i_p}\dfrac{dx^i}{ds}$ est parallèle le long de la géodésique $x^i(s)$; un tel tenseur vérifie la relation :

$$\nabla_j\xi_{ii_2\dots i_p} + \nabla_i\xi_{ji_2\dots i_p} = 0$$

d'où on déduit ([27], p. 63-66)

$$\nabla_l\nabla^l\xi_{i_1\dots i_p}\xi^{i_1\dots i_p} + F(\xi_{i_1\dots i_p}) = 0$$

on a donc, pour tout tenseur de Killing G-invariant :

$$(24\text{-}3) \qquad F(\xi_{i_1\dots i_p}) - \nabla_l\xi_{i_1\dots i_p}\nabla^l\xi^{i_1\dots i_p} = 0.$$

De (24-2) et (24-3) on déduit.

Théorème. — *Sur un espace homogène riemannien* G/H *il n'existe pas de tenseur harmonique* (*resp. de Killing*) G-*invariant vérifiant la relation* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) \geqslant 0$ (*resp.* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) \leqslant 0$) *à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle et alors nécessairement* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) = 0$. *Si la forme* $F(\xi_{i_1\dots i_p})$ *est définie positive* (*resp. négative*), *il n'existe pas de tenseur harmonique* (*resp. de Killing*) G-*invariant non nul.*

§ 25. — Vecteurs conformes et projectifs.

Puisque pour toute transformation infinitésimale affine (X) les opérateurs $\mathfrak{L}$ et ∇ commutent, si ξ est un vecteur G-invariant, il en sera de même du tenseur $\nabla_j\xi_i$, et, pour toute transformation infinitésimale du groupe G, $\mathfrak{L}$ commutant avec la contraction, $\nabla_i\xi^i$ est une fonction G-invariante, donc une constante, il en résulte que pour tout vecteur G-invariant

$$\nabla_k\nabla_l\xi^l = 0,$$

en particulier, tout vecteur G-invariant conforme est homo-

thétique, et tout vecteur G-invariant projectif est affine. D'autre part, pour un vecteur G-invariant $g_{ij}\xi^i\xi^j$ est constant, donc borné et de plus, l'espace homogène riemannien G/H est complet, en appliquant le théorème du paragraphe 18, on en déduit :

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène riemannien* G/H *tout vecteur* G-*invariant conforme ou projectif est un vecteur de Killing.*

§ 26. — Vecteurs et tenseurs analytiques sur un espace homogène kählerien.

Supposons maintenant que G/H est un espace homogène Kählerien. Soit ξ un vecteur covariant analytique, c'est-à-dire vérifiant

$$\nabla_{\beta^*}\xi_\alpha = \nabla_\beta\xi_{\alpha^*}$$

de l'identité de Ricci

$$\nabla_{\delta^*}\nabla_\gamma\nabla_\beta - \nabla_\gamma\nabla_{\delta^*}\xi_\beta = -\xi_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta^*},$$

on déduit

$$\nabla_{\delta^*}\nabla_\gamma\xi_\beta - \xi_\alpha R^\alpha{}_{\gamma\delta^*\beta} = 0,$$

d'où

$$\nabla^\gamma\nabla_\gamma\xi_\beta - R^\alpha{}_\beta\xi_\alpha = 0.$$

avec la formule complexe conjuguée, ce qui d'après (23.1) est équivalent à

$$\Delta\xi = 0.$$

Si ξ est G-invariant nous pouvons alors appliquer le théorème du paragraphe 23. Si ξ est un vecteur contravariant analytique

$$\nabla_{\gamma^*}\xi^\alpha = \nabla_\gamma\xi^{\alpha^*} = 0,$$

un calcul analogue à celui fait précédemment, donne

$$\nabla^\gamma\nabla_\gamma\xi^\alpha + R^\alpha{}_\beta\xi^\beta = 0,$$

(avec la formule complexe conjuguée), ce qui entraîne la relation (23-4), on a donc la même conclusion que pour les vecteurs isométriques.

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène kählerien vérifiant* $R_{\alpha\beta^*}\xi^\alpha\xi^{\beta^*} \geqslant 0$ (*resp.* $R_{\alpha\beta^*}\xi^\alpha\xi^{\beta^*} \leqslant 0$), *tout vecteur réel, G-invariant, covariant* (*resp. contravariant*), *analytique est à dérivée covariante nulle, et si* $R_{\alpha\beta^*}\xi^\alpha\xi^{\beta^*}$ *est définie positive* (*resp. négative*) *il n'existe pas de tel vecteur non nul.*

Si les composantes $\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ d'un tenseur réel de type mixte sont des fonctions analytiques des coordonnées (z^α), nous avons encore

$$(26\text{-}1)\qquad \nabla_{\gamma^*}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} = \nabla_\gamma\xi^{\alpha_1^*\cdots\alpha_p^*}{}_{\beta_1^*\ldots\beta_q^*} = 0,$$

par contraction de l'identité de Ricci, on obtient

$$(26\text{-}2)\qquad \nabla_\gamma\nabla^\gamma\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} = -R^{\alpha_1}{}_\lambda\xi^{\lambda\alpha_2\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} - R^{\alpha_p}{}_\lambda\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}\lambda}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} + R^\mu{}_{\beta_1}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\mu\beta_2\ldots\beta_q} + \cdots + R^\mu{}_{\beta_q}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_{q-1}\mu}.$$

Le tenseur ξ étant supposé invariant par le groupe G, on a

$$\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_p} = C^{te},$$

d'où

$$\nabla_\gamma\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q} + \xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\nabla_\gamma\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q} = 0,$$

le deuxième terme qui peut s'écrire

$$\xi_{\alpha_1^*\ldots\alpha_p^*}{}^{\beta_1^*\cdots\beta_q^*}\nabla_\gamma\xi^{\alpha_1^*\cdots\alpha_p^*}{}_{\beta_1^*\ldots\beta_q^*}$$

est nul d'après (26-1), donc

$$\nabla_\gamma\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q} = 0$$

d'où, après dérivation contractée :

$$\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q}\nabla_\gamma\nabla^\gamma\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} + \nabla_\gamma\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\nabla^\gamma\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q} = 0,$$

de la relation (26-2), on déduit alors, en posant

$$G(\xi) \doteq -R^{\alpha_1}{}_\lambda\xi^{\lambda\alpha_2\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q} - \cdots - R^{\alpha_p}{}_\lambda\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}\lambda}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_p} + R^\mu{}_{\beta_1}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\mu\beta_1\ldots\beta_q}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q} + \cdots + R^\mu{}_{\beta_q}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_{q-1}\mu}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\cdots\beta_q}$$

des résultats analogues à ceux de YANO-BOCHNER ([27], p. 131-142).

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène kählerien, si les composantes analytiques complexes* $\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ *d'un tenseur G-invariant réel de type mixte vérifient l'inégalité* $G(\xi) \geqslant 0$, *alors* $G(\xi) = 0$ *et* $\nabla_\alpha\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} = 0$.

Suivant Yano-Bochner [27], si nous désignons, en chaque point de la variété, par M et m, respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice $R_{\alpha\beta^*}$, on a :

Théorème. — *Sur un espace homogène kählerien,* M *et* m *étant en chaque point respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice* $R_{\alpha\beta^*}$, *si* $qm - pM \geq 0$, *tout tenseur complexe analytique* G-*invariant de type mixte* $\xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ *vérifie* $\nabla_\gamma \xi^{\alpha_1 \dots \alpha_q}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = 0$, *si* $qm - pM > 0$, *il n'existe pas de tenseur complexe analytique* G-*invariant de ce type, non nul.*

Corollaire. — *Sur un espace homogène d'Einstein-Kähler, tout tenseur analytique complexe* G-*invariant de type mixte* $\xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ *est à dérivée covariante nulle. Si la courbure scalaire est positive (resp. négative), il n'existe pas de tel tenseur non nul pour* $q > p$ *(resp.* $q < p$*).*

§ 27. — Espaces homogène $\mathcal{H}_{(n)}$, définition.

Sur un espace homogène G/H de dimension n, nous désignerons par $\mathcal{H}$(G/H), l'algèbre de cohomologie relativement à l'opérateur d, des formes G-invariantes sur G/H. $\mathcal{H}^p$(G/H) désignera l'espace des classes de degré p. Nous considérerons dans la suite des espaces homogènes vérifiant la condition : dimension $\mathcal{H}^n(G/H) \neq 0$, cette dimension est alors nécessairement 1; et, la condition est équivalente aux deux suivantes : a) il existe une n-forme G-invariante non homologue à 0, b) pour toute $(n-1)$-forme, G-invariante, on a $d\alpha = 0$. On sait que ce cas se présente par exemple si G est un groupe de Lie unimodulaire et H un sous-groupe fermé connexe réductif dans G (ou si G/H est orientable, G unimodulaire agissant effectivement sur G/H). Nous désignerons dans la suite par $\mathcal{H}_{(n)}$ tout espace homogène proprement riemannien de dimension n vérifiant la condition : dimension $\mathcal{H}^n(G/H) = 1$. Sur un tel espace si ξ est une 1-forme G-invariante, son adjointe $*\xi$ est une $(n-1)$-forme G-invariante, donc

$$d{*}\xi = 0, \quad \text{d'où} \quad \delta\xi = 0,$$

de plus, de la relation

$$*d(a \wedge *b) = (da, b) - (a, \delta b),$$

on déduit que si a et b sont des formes G-invariantes de degré, respectivement p et $p+1$, on a

$$(da, b) = (a, \delta b).$$

Il en résulte alors qu'une forme G-invariante est harmonique si et seulement si elle est fermée et cofermée et que toute forme G-invariante admet une décomposition unique en somme de 3-formes G-invariantes, respectivement harmonique, homologue à 0 et cohomologue à 0 [7].

§ 28. — Vecteurs de Killing G-invariants sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$.

Nous avons vu qu'un vecteur contravariant analytique (calcul local du paragraphe 26) vérifie la relation

$$\Delta\xi = Q\xi.$$

Nous allons voir que sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$ kählerien, cette relation caractérise les vecteurs contravariants analytiques G-invariants.

Par un calcul direct, on a, Φ_{ij} étant la 2-forme canonique :

$$\begin{aligned}(28\text{-}1)\quad & 2\xi^i(\nabla_p\nabla^p\xi_i + R_{ip}\xi^p) \\ & + (\Phi^i{}_a\nabla_j\xi^a - \Phi^a{}_j\nabla_a\xi^i)(\Phi_{ib}\nabla^j\xi^b - \Phi^{bj}\nabla_b\xi^i) = \nabla_p(\xi^i\nabla^p\xi_i) \\ & + 2(R_{ip}\xi^i\xi^p - \Phi^i{}_a\Phi^{bj}\nabla_j\xi^a\nabla_b\xi_i),\end{aligned}$$

d'autre part, de

$$\nabla_l\nabla_k\Phi_{ij} - \nabla_k\nabla_l\Phi_{ij} = 0,$$

on déduit

$$\Phi^l{}_j R_{pl} = \frac{1}{2}\Phi^{pr}R_{jlpr}$$

d'où

$$R_{ip}\xi^i\xi^p = \frac{1}{2}\Phi^{pr}\Phi^j{}_k R_{ljpr}\xi^l\xi^k$$

de plus, en utilisant l'identité de Ricci et l'antisymétrie de Φ^{pr}, on a

$$R_{ip}\xi^i\xi^p = -\Phi^{pr}\Phi^j{}_k\nabla_r\nabla_p\xi_j\xi^k$$

finalement (28-1) s'écrit :

$$(28\text{-}2) \quad 2\xi^i(\nabla_p\nabla^p\xi_i + R_{ip}\xi^p) + (\Phi^i{}_a\nabla_j\xi^a - \Phi^a{}_j\nabla_a\xi^i)(\Phi_{ib}\nabla^j\xi^b - \Phi^{bj}\nabla_b\xi_i) = \nabla_p(\xi^i\nabla^p\xi_i) - 2\nabla_r(\Phi^{pr}\Phi^j{}_k(\nabla_p\xi_j)\,\xi^k).$$

Le membre de droite est la divergence d'un vecteur G-invariant, donc nul sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$. Il en résulte que

$$\nabla_p\nabla^p\xi_i + R_{ip}\xi^p = 0$$

(ou encore d'après l'expression de $(\Delta\xi)_i$ rappelée au paragraphe 19)

$$\Delta\xi - Q\xi = 0$$

entraîne

$$\Phi^i{}_a\nabla_j\xi^a - \Phi^a{}_j\nabla_a\xi^i = 0$$

c'est-à-dire que le vecteur ξ^i est analytique.

Considérons maintenant un vecteur covariant analytique, on sait qu'un tel vecteur est harmonique. Réciproquement soit sur un espace kählerien $\mathcal{H}_{(n)}$, un vecteur harmonique

$$\Delta\xi = 0$$

est alors équivalent à

$$d\xi = \delta\xi = 0$$

d'autre part sur un espace kählerien les opérateurs $\mathfrak{J}$ et Δ commutent, d'où

$$\Delta\mathfrak{J}\xi = 0$$

soit

$$\delta\mathfrak{J}\xi = d\mathfrak{J}\xi = 0$$

$d\mathfrak{J}\xi = 0$ entraîne

$$\Phi^p{}_i\nabla_j\xi_p = \Phi^p{}_j\nabla_i\xi_p,$$

c'est-à-dire, en coordonnées locales complexes

$$\nabla_{\beta^*}\xi_\alpha = -\nabla_\alpha\xi_{\beta^*}$$

d'où, d'après $d\xi = 0$,

$$\nabla_{\beta^*}\xi_\alpha = 0.$$

Le vecteur ξ est un vecteur covariant analytique.

Théorème. — *Sur un espace kählerien $\mathcal{H}_{(n)}$, il y a identité entre les vecteurs G-invariants analytiques contravariants (resp. covariants) et les vecteurs de Killing (resp. harmoniques) G-invariants.*

§ 29. — Tenseurs conformes G-invariants.

Nous reprenons maintenant les notations et les calculs locaux du paragraphe 17.

Il s'agit ici de tenseurs G-invariants conformes sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$. De la définition d'un tenseur conforme, on déduit

$$(29.1) \qquad \nabla^j \xi^{ii_2 \dots i_p} \nabla_i \xi_{j i_2 \dots i_p} = -\nabla^j \xi^{ii_2 \dots i_p} \nabla_j \xi_{i i_2 \dots i_p} + 2n \theta^{i_2 \dots i_p} \theta_{i_2 \dots i_p},$$

d'autre part

$$\nabla_i (\nabla_j \xi^{ii_2 \dots i_p} \xi^j{}_{i_2 \dots i_p}) - \nabla_j (\nabla_i \xi^{ii_2 \dots i_p} \xi^j{}_{i_2 \dots i_p}) = \mathrm{F}(\xi_{i_1 \dots i_p}) + \nabla_j \xi^{ii_2 \dots i_p} \nabla_i \xi^j{}_{i_2 \dots i_p} - \nabla_i \xi^{ii_2 \dots i_p} \nabla_j \xi^j{}_{i_2 \dots i_p},$$

le premier membre est la divergence d'un vecteur G-invariant, il est donc nul. La relation (29.1) devient alors :

$$\nabla^j \xi^{ii_2 \dots i_p} \nabla_j \xi_{i i_2 \dots i_p} + n(n-2) \theta^{i_2 \dots i_p} \theta_{i_2 \dots i_p} - \mathrm{F}(\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}) = 0.$$

THÉORÈME. — *Sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$ il n'existe pas de tenseur G-invariant conforme, vérifiant $\mathrm{F}(\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}) \leqslant 0$ à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement $\mathrm{F}(\xi_{i_1 \dots i_p}) = 0$. En particulier, si la forme $\mathrm{F}(\xi_{i_1 \dots i_p})$ est définie négative, alors il n'existe pas de tenseur G-invariant conforme non nul.*

De même, dans le cas d'un espace $\mathcal{H}_{(n)}$, β étant un tenseur G-invariant, on déduit de (17-6),

THÉORÈME. — *Sur un espace proprement riemannien $\mathcal{H}_{(n)}$, un tenseur G-invariant est conforme si et seulement si il est solution de l'équation*

$$p \Delta \xi + \left[1 - \frac{2}{n}\right] d\delta\xi = (p+1) Q_p \xi.$$

De la même manière on déduit de (17-8),

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène $\mathcal{H}_{(n)}$ proprement riemannien où l'opérateur Q_p est défini positif si λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $(p+1)\, Q_p$ sur les p-formes, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes G-invariantes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à* $\dfrac{\lambda_1}{p}$ $\left(\textit{resp.}\ \dfrac{\lambda_1}{p + 1 - \dfrac{2}{n}}\right)$.

De (17-9) on déduit,

THÉORÈME. — *Sur un espace $\mathcal{H}(n)$ proprement riemannien à courbure constante, les valeurs propres de l'opérateur* Δ *sur les p-formes* G-*invariantes co-fermées,* (*resp. fermées*) *sont supérieures ou égales à*

$$K_1 = \frac{Rp(p+1)(n-p)}{n(n-1)} \quad \left(\text{resp. } K_2 = \frac{K_1}{p+1-\frac{2}{n}}\right).$$

Les formes co-fermées correspondant à K_1 *sont des formes de Killing. Les formes fermées correspondant à* K_2 *sont des formes conformes pures. L'espace vectoriel* L *des formes conformes est somme directe des espaces vectoriels* L_1 *et* L_2 *des formes de Killing et des formes conformes pures. Les projecteurs de* L *sur* L_1 *et* L_2 *sont respectivement* δd *et* $d\delta$.

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS PROJECTIVES ET CONFORMES SUR UN ESPACE D'EINSTEIN

§ 30. — Espace vectoriel des 1-formes conformes et des 1-formes projectives.

1° Soit sur un espace riemannien V une 1-forme conforme

$$(30\text{-}1) \qquad \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 2\Phi g_{ij} \qquad \left(\Phi = -\frac{\delta\xi}{n}\right).$$

Soit η une autre 1-forme conforme correspondant à la fonction ψ, $\alpha = [\xi, \eta]$ est une 1-forme conforme correspondant à la fonction : $\xi^p \Phi_p - \eta^p \psi_p$.

De (30-1) on déduit

$$(30\text{-}2) \qquad \Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = Q\xi.$$

Supposons V espace d'Einstein avec $R \neq 0$, alors

$$Q\xi = \frac{2R}{n}\xi$$

et (30-2) s'écrit

$$(30\text{-}3) \qquad \xi = \frac{n}{2R}\delta d\xi + \frac{n-1}{R} d\delta\xi.$$

Désignons par ζ_i le vecteur $\xi_i + \dfrac{n(n-1)}{R}\Phi_i$ et formons

$$(30\text{-}4) \quad \nabla_i \zeta_j + \nabla_j \zeta_i = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i + \frac{2n(n-1)}{R}\nabla_i \Phi_j$$

on a d'autre part

$$\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{R}_{ij} = -(n-2)\,\nabla_j\Phi_i - g_{ij}\nabla^p\Phi_p$$

d'où, pour un espace d'Einstein

$$(30\text{-}5)\qquad \frac{\mathrm{R}}{n}(\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i) = -(n-2)\nabla_j\Phi_i - g_{ij}\nabla^p\Phi_p$$

d'où
$$\nabla^p\Phi_p = -\frac{\mathrm{R}}{n-1}\Phi$$

et (30-4) se réduit à

$$\nabla_i\zeta_j + \nabla_j\zeta_i = 0.$$

Le vecteur ζ est un vecteur de Killing, alors la 1-forme $\frac{n-1}{\mathrm{R}}d\delta\xi$ est une 1-forme conforme homologue à 0. Si L désigne l'algèbre de Lie des 1-formes conformes, l'espace vectoriel L est la somme des espaces vectoriels L_1 et L_2, où L_1 est l'algèbre de Lie des 1-formes isométriques et L_2 l'espace vectoriel des 1-formes conformes homologues à 0. La somme est directe puisque toute 1-forme $\in \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ est à dérivée covariante nulle, or sur un espace d'Einstein à $\mathrm{R} \neq 0$, d'après l'identité de Ricci toute 1-forme à dérivée covariante nulle est nécessairement nulle. Les projecteurs de L sur L_1 et L_2 sont respectivement δd et $d\delta$.

Nous allons maintenant étudier les crochets des éléments de L_1 et L_2.

On a d'abord $[\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_1] \subset \mathrm{L}_1$; soit maintenant $\nu \in \mathrm{L}_1$, $\mu \in \mathrm{L}_2$ et $\alpha = [\nu, \mu]$. Par un calcul direct, utilisant le fait que $\nabla_p\nu_i = -\nabla_i\nu_p$ et que μ est un vecteur gradient, on a $\alpha_i = \partial_i(\nu^p\mu_p)$ d'où $\alpha \in \mathrm{L}_2$, $[\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2] \subset \mathrm{L}_2$.

Soit maintenant μ et $\bar\mu$ deux 1-formes $\in \mathrm{L}_2$ correspondant aux fonctions φ et $\bar\varphi$, et $\beta = [\mu, \bar\mu]$, pour une 1-forme conforme correspondant à la fonction φ, on a

$$(30\text{-}5)\qquad \nabla_k\nabla_j\xi_i + \mathrm{R}_{ijkp}\xi^p = g_{ij}\varphi_k + g_{ik}\varphi_j - g_{jk}\varphi_i,$$

d'autre part, pour une 1-forme conforme fermée sur un espace d'Einstein, on déduit de (30-2)

$$(30\text{-}6)\qquad \varphi_i = -\frac{\mathrm{R}}{n(n-1)}\xi_i$$

en tenant compte du fait que les 1-formes μ et $\bar{\mu}$ sont fermées, on a facilement, en utilisant (30-5) et (30-6)

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = 0$$

c'est-à-dire que

$$[L_2, L_2] \subset L_1.$$

2° Soit maintenant ξ un vecteur projectif, il lui correspond un vecteur ψ, tel que

$$\nabla_p\nabla_j\xi^i = -R^i_{pjl}\xi^l + \delta^i_p\psi_j + \delta^i_j\psi_p, \tag{30-7}$$

si η est un autre vecteur projectif, $\alpha = [\xi, \eta]$ est un vecteur projectif correspondant au vecteur χ défini par

$$\chi_j = \varphi_p\nabla_j\xi^p - \psi_p\nabla_j\eta^p + \zeta^p\nabla_p\varphi_j - \eta^p\nabla_p\psi_j.$$

Reprenons la relation (19-1) pour une 1-forme projective

$$\Delta\xi - \frac{2}{n+1}d\delta\xi = Q\xi$$

et supposons que V est espace d'Einstein à $R \neq 0$, on a :

$$\xi = \frac{n(n-1)}{2R(n+1)}d\delta\xi + \frac{n}{2R}\delta d\xi,$$

soit ν la 1-forme définie par

$$\nu = \xi - \frac{n(n-1)}{2R(n+1)}d\delta\xi,$$

utilisant le fait que sur un espace d'Einstein, pour tout vecteur projectif ξ, on a

$$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \frac{n(1-n)}{R}\nabla_j\psi_i,$$

on obtient facilement

$$\nabla_j\nu_i + \nabla_i\nu_j = 0$$

le vecteur ν est un vecteur de Killing, c'est-à-dire que la 1-forme $\frac{n}{2R}\delta d\xi$ est une 1-forme isométrique, tandis que la 1-forme $\frac{n(n-1)}{2R(n+1)}d\delta\xi$, est une 1-forme projective homologue à 0. L désignant l'algèbre de Lie des 1-formes projectives, L_1, l'algèbre de Lie des 1-formes isométriques et L_2, l'espace

vectoriel des 1-formes projectives homologues à 0, on a, comme dans le cas conforme la somme directe $L = L_1 + L_2$, les projecteurs de L sur L_1 et L_2 sont respectivement δd et $d\delta$. Nous allons maintenant étudier les crochets des éléments de L_1 et L_2, si $\nu \in L_1$ et $\mu \in L_2$, en utilisant le fait que ν est forme de Killing et μ homologue à 0, on a déjà vu que $\alpha = [\nu, \mu]$ est homologue à 0; on en déduit alors $[L_1, L_2] \subset L_2$. Soit maintenant μ et $\bar{\mu} \in L_2$ et $\beta = [\mu, \bar{\mu}]$, par un calcul direct, utilisant le fait que les formes μ et $\bar{\mu}$ sont fermées, on a

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = \mu^p(\nabla_j\nabla_i\bar{\mu}_p + \nabla_i\nabla_j\bar{\mu}_p) - \bar{\mu}_p(\nabla_j\nabla_i\mu_p + \nabla_i\nabla_j\mu_p),$$

d'où, puisque les 1-formes μ et $\bar{\mu}$ sont projectives

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = -\mu^p\bar{\mu}^r(R_{pijr} + R_{pjir}) + \bar{\mu}^p\mu^r(R_{pijr} + R_{pjir})$$
$$+ \frac{2}{n+1}[\mu_i\nabla_j\nabla_r\bar{\mu}^r + \mu_j\nabla_i\nabla_r\bar{\mu}^r - \bar{\mu}_i\nabla_j\nabla_r\mu^r - \bar{\mu}_j\nabla_i\nabla_r\mu^r],$$

en utilisant maintenant les relations classiques entre les composantes du tenseur de courbure et en remarquant que pour toute 1-forme, projective, fermée, on a

$$\nabla_i\nabla_r\mu^r = \frac{2R}{n(1-n)}\mu_i,$$

on en déduit

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = 0$$

donc $[L_2, L_2] \subset L_1$. Nous obtenons donc un résultat analogue au résultat donné par Lichnerowicz [19] pour les transformations conformes dans le cas compact.

Théorème. — *Sur un espace d'Einstein, si* L *désigne l'algèbre de Lie des* 1-*formes conformes* (*resp. projectives*), *l'espace vectoriel* L *est la somme directe* $L = L_1 + L_2$, *où* L_1 *est l'algèbre de Lie des* 1-*formes de Killing,* L_2 *l'espace vectoriel des* 1-*formes conformes* (*resp. projectives*) *homologues à* 0. *Les crochets de* L_1 *et* L_2 *vérifient les relations:* $[L_1, L_1] \subset L_1$, $[L_1, L_2] \subset L_2$, $[L_2, L_2] \subset L_1$.

§ 31. — Cas d'un espace d'Einstein complet.

1° Soit ξ une 1-forme conforme, on a alors (paragraphe 2)

$$\text{(31-1)} \quad \nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkl}\xi^l + \frac{1}{n}[g_{ij}(d\delta\xi)_k + g_{ik}(d\delta\xi)_j - g_{jk}(d\delta\xi)_i] = 0,$$

pour une 1-forme conforme fermée sur un espace d'Einstein à $R \neq 0$, cette relation devient :

$$(31\text{-}2)\quad \nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkl}\xi^l + \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}\xi_k + g_{ik}\xi_j - g_{jk}\xi_i) = 0$$

associons à la 1-forme ξ_i et à la géodésique $x^i(s)$, la fonction $f = \xi_i \dfrac{dx^i}{ds}$, on déduit de (31-2)

$$\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{R}{n(n-1)}f = 0$$

d'où, si $R < 0$, en posant $K^2 = \dfrac{R}{n(1-n)}$,

$$(31\text{-}3)\quad f = A\ \mathrm{ch}\,(Ks + B),\qquad A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

Supposons le vecteur ξ de longueur bornée, alors la fonction f est bornée, d'autre part, l'espace étant complet, s peut prendre toute valeur de 0 à $+\infty$, alors d'après (31-3), f ne peut être bornée que si $A = 0$, d'où $f = 0$; de cette relation vérifiée en tout point et pour toute géodésique issue de ce point, on déduit $\xi_i = 0$.

2° Si ξ une est 1-forme projective fermée, repartons de

$$(31\text{-}4)\quad \nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkl}\xi^l + \frac{1}{n+1}[g_{ij}(d\delta\xi)_k + g_{ik}(d\delta\xi)_j] = 0.$$

Si ξ est une 1-forme projective fermée sur un espace d'Einstein à $R \neq 0$,

$$d\delta\xi = \frac{2R(n+1)}{n(n-1)}\xi,$$

(31-4) devient alors

$$(31\text{-}5)\quad \nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkl}\xi^l + \frac{2R}{n(n-1)}(g_{ij}\xi_k + g_{ik}\xi_j) = 0$$

et pour la fonction $f = \xi_i \dfrac{dx^i}{ds}$, on en déduit

$$\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{4R}{n(n-1)}f = 0$$

et, dans les mêmes conditions que précédemment, on en conclut $\xi_i = 0$.

Théorème. — *Sur un espace d'Einstein complet, à courbure scalaire négative, il n'existe pas de 1-forme projective ou conforme, fermée non nulle, correspondant à un vecteur de longueur bornée.*

Et, en utilisant le théorème du paragraphe 30 nous pouvons énoncer :

Théorème. — *Sur un espace d'Einstein complet, à courbure scalaire négative, toute 1-forme ξ, conforme ou projective, telle que le vecteur associé à la 1-forme $d\delta\xi$ soit de longueur bornée, est une forme de Killing.*

§ 32. — Cas d'un espace harmonique.

1° Pour tout vecteur projectif ξ, on a

$$\mathfrak{L}(\xi)W^i_{jkl} = 0$$

où W_{ijkl} est le tenseur de courbure projectif, qui, dans le cas d'un espace d'Einstein s'écrit :

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$$

d'après (2-5) pour tout vecteur projectif ξ sur un espace d'Einstein on a :

$$\mathfrak{L}(\xi)g_{ij} = \frac{n(1-n)}{R}\nabla_j\varphi_i \tag{32-1}$$

et

$$\mathfrak{L}(\xi)g^{ij} = -\frac{n(1-n)}{R}\nabla^j\varphi^i. \tag{32-2}$$

En utilisant ces deux relations et en remarquant que dans le cas d'un espace d'Einstein le tenseur W_{ijkl} vérifie les relations :

$$W_{ijkl} = -W_{jikl} = -W_{ijlk} = W_{klij}$$

on obtient, pour la dérivée de Lie du scalaire $W = W_{ijkl}W^{ijkl}$

$$\mathfrak{L}(\xi)W = \frac{2n(n-1)}{R}W_{ilmn}W^{jlmn}\nabla_j\varphi^i, \tag{32-3}$$

pour un espace d'Einstein, on a d'autre part, par un calcul direct :

$$W_{ilmn}W^{jlmn} = R_{ilmn}R^{jlmn} - \frac{2R^2}{n^2(n-1)}\delta^j_i.$$

Supposons maintenant l'espace harmonique correspondant à la fonction $f(\Omega)$, on sait que ([15], [16]),

$$T^{ilmn}T_{jlmn} = \frac{1}{2}(n+2)k\delta^i_j, \quad \left(k = -\frac{5}{2}f''(0) - \frac{(f'(0))^2}{n-1}\right)$$

où T est le tenseur défini par

$$T_{ijkl} = \frac{1}{3}(R_{ijkl} + R_{iljk}) - \frac{f'(0)}{2(n-1)}(2g_{ij}g_{kl} - g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Par un calcul direct, on en déduit alors

$$R_{ilmn}R^{jlmn} = h\delta^j_i. \quad \left(h = -\frac{3}{2}\left[\frac{5}{2}(n+2)f''(0) + (f'(0))^2\right]\right)$$

et,

(32-4) $$W_{ilmn}W^{jlmn} = \frac{3}{2}k(n+2)\delta^i_j,$$

$$W = \frac{3n}{2}(n+2)k.$$

Pour un espace harmonique, le scalaire W est constant, d'où $\mathcal{L}(\xi)W = 0$, alors, de (32-3) et (32-4) on déduit, si l'espace n'est pas à courbure constante

(32-5) $$\nabla_p\varphi^p = 0.$$

Calculons maintenant $(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk}$ à partir de

$$(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ia}[\nabla_k\mathcal{L}(\xi)g_{aj} + \nabla_j\mathcal{L}(\xi)g_{ak} - \nabla_a\mathcal{L}(\xi)g_{jk}]$$
$$= \frac{n(1-n)}{2R}g^{ia}[\nabla_k\nabla_j\varphi_a + \nabla_j\nabla_k\varphi_a - \nabla_a\nabla_k\varphi_j],$$

on en déduit, en utilisant l'identité de Ricci

$$\frac{n(1-n)}{2R}[\nabla_k\nabla_j\varphi^i + \varphi_pR^p{}_{kj}{}^i] = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j$$

et, par contraction

$$\nabla_k\nabla_p\varphi^p = \frac{2R(n+1)}{n(1-n)}\varphi_k$$

(32-5) entraîne alors, $\varphi_k = 0$, ξ est un vecteur affine.

2° Considérons maintenant le tenseur de courbure conforme C_{ijkl}, dans le cas d'un espace d'Einstein, il est identique au tenseur de courbure projectif, en utilisant, pour une 1-forme conforme, ξ les relations

$$\mathcal{L}(\xi)C^i_{jkl} = 0, \qquad \mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \Phi g_{ij}, \qquad \mathcal{L}(\xi)g^{ij} = -\Phi g^{ij},$$

on obtient facilement

$$\mathcal{L}(\xi)\,(C_{ijkl}C^{ijkl}) = -2\Phi C_{ijkl}C^{ijkl}$$

d'où, si l'espace est harmonique, non à courbure constante, il en résulte $\Phi = 0$, ξ est une 1-forme isométrique.

THÉORÈME. — *Sur un espace harmonique qui n'est pas à courbure constante, tout vecteur projectif* (*resp. conforme*) *est affine* (*resp. isométrique*).

§ 33. — Cas d'un espace d'Einstein compact.

Soit ξ une 1-forme projective fermée, de (31-4) on déduit qu'une telle forme vérifie :

$$(33\text{-}1) \qquad 2\nabla_k\nabla_i\xi_j = \frac{1}{n+1}[2g_{ij}\nabla_k\nabla_p\xi^p + g_{ik}\nabla_j\nabla_p\xi^p + g_{jk}\nabla_i\nabla_p\xi^p],$$

réciproquement, on voit facilement que si V_n est un espace proprement riemannien compact toute 1-forme vérifiant (33-1) est une 1-forme projective fermée. Nous avons remarqué d'autre part, que sur un espace d'Einstein une telle 1-forme est solution de

$$(33\text{-}2) \qquad d\delta\xi = \frac{2R(n+1)}{n(n-1)}\xi.$$

Pour une 1-forme ξ quelconque, considérons le tenseur

$$\alpha_{kij} = 2\nabla_k\nabla_i\xi_j - \frac{1}{n+1}(2g_{ij}\nabla_k\nabla_p\xi^p + g_{ik}\nabla_j\nabla_p\xi^p + g_{jk}\nabla_i\nabla_p\xi^p),$$

sur un espace proprement riemannien compact, $\alpha_{kij} = 0$ signifie que ξ est une 1-forme projective fermée. Sur un espace d'Einstein, pour les solutions de (33-2) ce tenseur s'écrit

$$(33\text{-}3) \qquad \alpha_{kij} = 2\nabla_k\nabla_i\xi_j - \frac{2R}{n(1-n)}(2g_{ij}\xi_k + g_{ik}\xi_j + g_{jk}\xi_i)$$

on en déduit

$$(33\text{-}4)\qquad \alpha_{kij}\alpha^{kij} = 4\nabla_k\nabla_i\xi_j\nabla^k\nabla^i\xi^j - \frac{8R^2(3n+5)}{n^2(1-n)^2}\xi^k\xi_k$$

transformons maintenant $\nabla_k\nabla_i\xi_j\nabla^k\nabla^i\xi^j$, on a successivement

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_k(\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i) - \nabla_j\xi_i\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i,$$
$$\nabla_j\xi_i\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_j(\xi_i\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i) - \xi_i\nabla_j\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i,$$

et, en notant simplement $\nabla_i A^i$ les termes qui sont des divergences

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_i A^i + \xi_i\nabla_j\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i,$$

en utilisant deux fois l'identité de Ricci, on a, sur un espace d'Einstein, pour les solutions de (33-2)

$$\nabla_k\nabla_j\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_k\nabla^k\nabla_j\nabla^j\xi^i + \frac{R^2(n+3)}{n^2(1-n)}\xi^i + R^i{}_{pkj}\nabla^k\nabla^j\xi^p,$$

d'où on déduit :

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_i A^i + \frac{4R^2(n+3)}{n^2(1-n)^2}\xi^k\xi_k - R_{pjki}R^{qjki}\xi^p\xi_q,$$

(33-4) devient alors

$$(33\text{-}5)\qquad \alpha_{kij}\alpha^{kij} + 4W_{ilmn}W^{jlmn}\xi^i\xi_j = \nabla_i A^i,$$

où W_{ilmn} est le tenseur de courbure projectif, c'est-à-dire que dans le cas d'un espace d'Einstein compact les 1-formes projectives fermées sont les 1-formes qui vérifient (33-2) et

$$W_{ilmn}W^{jlmn}\xi^i\xi_j = 0,$$

on en déduit encore que dans ce cas, si la forme quadratique

$$a_{ij} = W_{ilmn}W_j{}^{lmn}$$

est définie, il n'existe pas de 1-forme projective fermée non nulle, donc toute 1-forme projective est isométrique.

THÉORÈME. — *Sur un espace d'Einstein compact, pour lequel la forme quadratique* $a_{ij} = W_{ilmn}W_j{}^{lmn}$ *est définie, toute 1-forme projective est isométrique.*

§ 34. — Transformations projectives et conformes sur un espace homogène d'Einstein.

NAGANO [21], a démontré que sur un espace homogène proprement riemannien, non « conformally flat », toute 1-forme conforme est isométrique, ceci entraîne en particulier que sur un espace homogène d'Einstein proprement riemannien qui n'est pas à courbure constante, toute transformation infinitésimale conforme est une isométrie. Par la même méthode, on peut démontrer un résultat analogue pour les 1-formes projectives. Soit V un tel espace d'Einstein, considérons l'espace $\overline{\mathrm{V}}$ constitué par la même variété différentiable mais munie de la métrique

$$\bar{g}_{ij} = \sqrt{\mathrm{W}}\, g_{ij}$$

on a immédiatement, pour tout vecteur projectif ξ

$$\mathfrak{L}(\xi)\bar{g}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{W}}}[2\mathrm{W}\mathfrak{L}(\xi)g_{ij} + g_{ij}\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{W}]$$

d'après (32-3) on en déduit

$$\mathfrak{L}(\xi)\bar{g}_{ij} = 0,$$

c'est-à-dire que tout vecteur projectif de V est un vecteur de Killing de $\overline{\mathrm{V}}$. Si V est homogène, le scalaire W est constant, donc les isométries de V et $\overline{\mathrm{V}}$ sont identiques, par conséquent dans ce cas, tout vecteur projectif de V est un vecteur de Killing.

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène d'Einstein proprement riemannien, à courbure non constante, tout vecteur conforme ou projectif est isométrique.*

CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS PROJECTIVES ET CONFORMES SUR UN ESPACE KAHLERIEN

Dans ce chapitre V_{2n} est un espace kählerien de dimension réelle $2n$, soit $F_{ij} = - F_{ji}$ la 2-forme canonique de la structure; en coordonnées locales complexes, on a :

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta^*} = 0, \qquad F_{\alpha\beta^*} = i g_{\alpha\beta^*}, \qquad F_{\alpha^*\beta} = - i g_{\alpha^*\beta}$$
$$F_\alpha{}^\beta = i\delta^\beta_\alpha, \qquad F_{\alpha^*}{}^{\beta^*} = - i\delta^{\beta^*}_{\alpha^*}, \qquad F^\beta{}_\alpha = - i\delta^\beta_\alpha, \qquad F^{\beta^*}{}_{\alpha^*} = i\delta^{\beta^*}_{\alpha^*}.$$

Ce tenseur définit l'opérateur complexe sur les vecteurs, que nous noterons $\mathfrak{J}$.

$$(\mathfrak{J}X)^i = F_p{}^i X^p, \qquad (\mathfrak{J}X)_i = F^p{}_i X_p$$

en coordonnées locales complexes :

$$(\mathfrak{J}X)^\alpha = iX^\alpha, \qquad (\mathfrak{J}X)_\alpha = - iX_\alpha,$$
$$(\mathfrak{J}X)^{\alpha^*} = - iX^{\alpha^*}, \qquad (\mathfrak{J}X)_{\alpha^*} = iX_{\alpha^*}.$$

§ 35. — Une propriété locale.

1° Soit ξ un vecteur projectif, repartons de

$$(35\text{-}1) \qquad \nabla_k\nabla_j\xi^p + R^p{}_{jkl}\xi^l = \delta^p_j\varphi_k + \delta^p_k\varphi_j$$

multiplions (35-1) par $F_p{}^i$, ce tenseur étant à dérivée covariante nulle,

$$\nabla_k\nabla_j(\mathfrak{J}\xi)^i = F_p{}^i\nabla_k\nabla_j\xi^p$$

d'où

$$(35\text{-}2) \qquad \nabla_k\nabla_j(\mathfrak{J}\xi)^i + F_p{}^i R^p{}_{jkl}\xi^l = F_j{}^i\varphi_k + F_k{}^i\varphi_j$$

En coordonnées locales complexes, en utilisant les relations

classiques entre les composantes du tenseur de courbure pour un espace kählerien, la relation (35-2) donne

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha} - R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^{\alpha}_{\beta}(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)_{\beta} \tag{35-3}$$

$$\nabla_{\gamma^*}\nabla_{\beta}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma^*\mu}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu} = \delta^{\alpha}_{\beta}(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma^*} \tag{35-4}$$

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)_{\beta^*} \tag{35-5}$$

$$\nabla_{\gamma^*}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha} = 0 \tag{35-6}$$

avec les formules complexes conjuguées. De

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha^*} + R^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = \delta^{\alpha^*}_{\beta^*}(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma}$$

on déduit, par contraction

$$\nabla^{\beta^*}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)_{\alpha} + R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = (\mathfrak{J}\varphi)_{\alpha}, \tag{35-7}$$

d'autre part, de

$$\nabla_{\gamma^*}\nabla_{\beta}(\mathfrak{J}\xi)_{\alpha} = g_{\alpha\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)_{\beta}$$

on déduit

$$\nabla^{\beta}\nabla_{\beta}(\mathfrak{J}\xi)_{\alpha} = (\mathfrak{J}\varphi)_{\alpha} \tag{35-8}$$

d'où, par addition de (35-7) et (35-8)

$$\nabla^{i}\nabla_{i}(\mathfrak{J}\xi)_{\alpha} + R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = 2(\mathfrak{J}\varphi)_{\alpha} \tag{35-9}$$

considérons maintenant

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha} - R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^{\alpha}_{\beta}(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)_{\beta}$$

et

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha^*} + R^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = \delta^{\alpha^*}_{\beta^*}(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma},$$

contractons α et β d'une part, α^* et β^* d'autre part et ajoutons

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{i}(\mathfrak{J}\xi)^{i} + 2R_{\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma} \tag{35-10}$$

ou

$$(\mathfrak{J}\varphi)_{\alpha} = -2R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} + (d\delta\mathfrak{J}\xi)_{\alpha}; \tag{35-11}$$

portons maintenant cette expression de $(\mathfrak{J}\varphi)_{\alpha}$ dans (35-9) qui peut s'écrire

$$-(\Delta\mathfrak{J}\xi)_{\alpha} + 2R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = 2(\mathfrak{J}\varphi)_{\alpha}$$

on a alors

$$-(\Delta\mathfrak{J}\xi)_{\alpha} + 6R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = 2(d\delta\mathfrak{J}\xi)_{\alpha}. \tag{35-12}$$

avec la formule complexe conjuguée; finalement, si ξ est une 1-forme projective sur l'espace kählerien, on a

$$-\Delta\mathcal{J}\xi + 3Q\mathcal{J}\xi = 2d\delta\mathcal{J}\xi. \tag{35-13}$$

Nous allons maintenant considérer des 1-formes projectives fermées, Λ désignant l'opérateur $i(F)$ (produit intérieur par F) on sait que sur cet espace kählerien pour une 1-forme

$$\delta\mathcal{J}\xi = -\Lambda d\xi$$

donc $d\xi = 0$ entraîne $\delta\mathcal{J}\xi = 0$, toute 1-forme projective fermée vérifie donc la relation

$$-\Delta\mathcal{J}\xi + 3Q\mathcal{J}\xi = 0. \tag{35-14}$$

d'autre part, on a vu que toute 1-forme projective vérifie la relation

$$\Delta\xi - \frac{2}{n+1}d\delta\xi = Q\xi,$$

il en résulte que si ξ est une 1-forme projective fermée, elle vérifie

$$\frac{2n-1}{2n+1}\Delta\xi = Q\xi, \tag{35-15}$$

mais, sur un espace kählerien l'opérateur $\mathcal{J}$ commute avec les opérateurs Δ et Q, de (35-15), on déduit alors

$$\frac{2n-1}{2n+1}\Delta\mathcal{J}\xi = Q\mathcal{J}\xi \tag{35-16}$$

de (35-14) et (35-16) il résulte

$$\frac{4(n-1)}{2n+1}\Delta\mathcal{J}\xi = 0$$

d'où, si $n > 1$, $\Delta\mathcal{J}\xi = 0$ c'est-à-dire que la 1-forme $\mathcal{J}\xi$ est harmonique, il en est de même de la 1-forme ξ, et, puisqu'elle est de plus fermée, elle vérifie alors $d\delta\xi = 0$, c'est-à-dire que c'est une forme affine.

2° Soit maintenant ξ une 1-forme conforme, repartons de

$$(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \nabla_k\nabla_j\xi^i + R^i_{jkl}\xi^l = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j - g_{jk}\varphi^i \tag{35-17}$$

où φ_i est le vecteur gradient $\varphi_i = \partial_i\varphi = -\dfrac{1}{2n}\partial_i\delta\xi$ de (35-17) on déduit

$$\text{(35-18)} \quad \nabla_k\nabla_j(\mathfrak{J}\xi)^i + F_p{}^i R^p{}_{jkl}\xi^l = F_j{}^i\varphi_k + F_k{}^i\varphi_j - g_{jk}(\mathfrak{J}\varphi)^i.$$

Par un calcul analogue à celui fait dans le cas projectif, on déduit de (35-18), en coordonnées locales complexes

$$\text{(35-19)} \quad \nabla_\gamma\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^\alpha_\beta(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{J}\varphi)_\beta$$
$$\text{(35-20)} \quad \nabla_{\gamma^*}\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)^\alpha + R^\alpha{}_{\beta\gamma^*\mu}(\mathfrak{J}\xi)^\mu = \delta^\alpha_\beta(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma^*} - g_{\beta\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)^\alpha$$
$$\text{(35-21)} \quad \nabla_\gamma\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^\alpha = \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{J}\varphi)_{\beta^*} - g_{\beta^*\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)^\alpha$$
$$\text{(35-22)} \quad \nabla_{\gamma^*}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^\alpha = 0$$

avec les formules complexes conjuguées; de

$$\nabla_\gamma\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha\beta^*\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = g_{\alpha\beta^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - g_{\beta^*\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

on tire par contraction

$$\text{(35-23)} \quad \nabla^{\beta^*}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = (1-n)\,(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

d'autre part, de

$$\nabla_{\gamma^*}\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)_\alpha = g_{\alpha\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\beta - g_{\beta\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

on déduit

$$\text{(35-24)} \quad \nabla^\beta\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)_\alpha = (1-n)\,(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha,$$

d'où, par addition de (35-23) et (35-24)

$$\text{(35-25)} \quad \nabla^l\nabla_l(\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha p}(\mathfrak{J}\xi)^p = 2(1-n)\,(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha,$$

considérons maintenant

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^\alpha_\beta(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{J}\varphi)_\beta$$

et

$$\nabla_\gamma\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha^*} + R^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^{\alpha^*}_{\beta^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - g_{\beta^*\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)^{\alpha^*}$$

contractons α et β d'une part, α^* et β^* d'autre part et ajoutons, il vient :

$$\text{(35-26)} \quad 2(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha = -2R_{\alpha p}(\mathfrak{J}\xi)^p + (d\delta\,\mathfrak{J}\xi)_\alpha$$

portons cette expression dans (35-25) on en déduit

$$-(\Delta\,\mathfrak{J}\xi)_\alpha + 2(2-n)\,R_{\alpha p}(\mathfrak{J}\xi)^p = (1-n)\,(d\delta\,\mathfrak{J}\xi)_\alpha$$

avec la formule complexe conjuguée.

Finalement, si ξ est une 1-forme conforme sur l'espace kählerien V_{2n}, on a

$$\text{(35-27)} \quad -\Delta\,\mathfrak{J}\xi + (2-n)\,Q\,\mathfrak{J}\xi = (1-n)\,d\delta\,\mathfrak{J}\xi.$$

Nous considérons maintenant des 1-formes conformes fermées, $\delta\mathfrak{J}\xi = 0$, elles vérifient

$$(35\text{-}28) \qquad -\Delta\mathfrak{J}\xi + (2-n)\,Q\mathfrak{J}\xi = 0$$

d'autre part $\mathfrak{J}$ commutant avec Q et Δ, on a pour de telles 1-formes

$$(35\text{-}29) \qquad 2\left(1-\frac{1}{2n}\right)\Delta\mathfrak{J}\xi = Q\mathfrak{J}\xi$$

de (35-28) et (35-29), on déduit

$$\frac{2(n-1)^2}{n(n-2)}\Delta\mathfrak{J}\xi = 0$$

d'où, pour $n > 1$, $\Delta\mathfrak{J}\xi = 0$, c'est-à-dire que la 1-forme $\mathfrak{J}\xi$ est harmonique, il en est de même de la 1-forme ξ, et, puisqu'elle est de plus fermée, elle vérifie

$$d\delta\xi = 0.$$

c'est une 1-forme homothétique.

THÉORÈME. — *Sur un espace kählerien* V_{2n} $(n > 1)$ *toute 1-forme projective (resp. conforme) fermée est affine (resp. homothétique).*

Supposons maintenant que l'espace kählerien est aussi espace d'Einstein pour sa métrique riemannienne; $Q\xi = 0$ vérifiée pour toute 1-forme projective (resp. conforme fermée) entraîne alors si $R \neq 0$

$$\xi = 0$$

donc, dans la décomposition

$$L = L_1 + L_2,$$

on a

$$L_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad L = L_1$$

on obtient alors le résultat suivant donné par YANO ([26], p. 273) dans le cas compact seulement.

THÉORÈME. — *Sur un espace d'Einstein-Kähler* V_{2n} $(n > 1)$ *à courbure scalaire non nulle, toute 1-forme projective ou conforme est forme de Killing.*

§ 36. — Cas d'un espace compact ou complet.

Si V_{2n} est compact, on sait que toute 1-forme affine ou homothétique est isométrique; si une telle forme est de plus supposée fermée, elle est à dérivée covariante nulle. La même conclusion est valable sur un espace complet dont le groupe d'holonomie ne laisse invariant aucun vecteur, mais alors la 1-forme à dérivée covariante nulle est nécessairement nulle.

Théorème. — *Sur un espace kählerien compact V_{2n} $(n > 1)$, toute 1-forme projective ou conforme fermée est à dérivée covariante nulle. Si V_{2n} est un espace kählerien complet dont le groupe d'holonomie ne laisse invariant aucun vecteur, il n'existe pas de 1-forme projective ou conforme fermée non nulle.*

Sur un espace kählerien V_{2n}, associons suivant Lichnerowicz ([13], p. 145), à toute 1-forme réelle ξ, le tenseur réel $a(\xi)_{ij}$ défini par :

$$a(\xi)_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \xi_\mu, \qquad a(\xi)_{\lambda\mu^*} = a(\xi)_{\lambda^*\mu} = 0, \qquad a(\xi)_{\lambda^*\mu^*} = \nabla_{\lambda^*}\xi_{\mu^*}.$$

$a(\xi) = 0$ fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la 1-forme ξ soit analytique.

Pour toute 1-forme ξ sur une variété kählerienne compacte, on a ([13], p. 145)

$$(36\text{-}1) \qquad \langle \Delta\xi - Q\xi, \xi\rangle = 4\langle a(\xi), a(\xi)\rangle.$$

Supposons que ξ est une 1-forme projective

$$\Delta\xi - Q\xi = \frac{2}{2n+1} d\delta\xi.$$

(36-1) devient

$$\frac{1}{2n+1}\langle d\delta\xi, \xi\rangle = \frac{1}{2n+1}\langle \delta\xi, \delta\xi\rangle = 2\langle a(\xi), a(\xi)\rangle$$

d'où

$$a(\xi) = 0$$

entraîne

$$\delta\xi = 0.$$

Théorème. — *Sur un espace kählerien compact, toute 1-forme projective analytique est isométrique.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Bidal et G. de Rham, Les formes différentielles harmoniques, *Comm. Math. Helv.*, 16 (1946), pp. 1-49.

[2] E. Cartan, Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, 1946.

[3] R. Couty, Sur les transformations définies par le groupe d'holonomie infinitésimale, I et II, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 244 (1957), pp. 553-555 et 1871-1873.

[4] R. Couty, Vecteurs et tenseurs invariants sur un espace homogène, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 246 (1958), pp. 2569-2571.

[5] R. Couty, Transformations infinitésimales projectives, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 247 (1958), pp. 804-806.

[6] J. Hano, On affine transformations of a riemannian manifold, *Nagoya Math. Journal*, vol. 9 (1955), pp. 98-109.

[7] J. Hano, On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups, *Amer Journal of Math.*, 79, n° 4 (1957, pp. 885-900.

[8] S. Kobayashi, A theorem on the affine transformation group of a riemannian manifold, *Nagoya Math. Journal*, vol. 9 (1955), pp. 39-41.

[9] S. Kobayashi, Groupes de transformations qui laissent invariante une connexion infinitésimale, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1954, pp. 644-645.

[10] B. Kostant, Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motion of a riemannian manifold, *Transact Amer Math. Soc.*, 80 (1955), pp. 528-542.

[11] Mme J. Lelong-Ferrand, Sur les groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 37, fasc. 3 (1958), pp. 269-278.

[12] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, *ed. Cremonese*, Rome, 1955.

[13] A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformation, Paris, Dunod 1958.

[14] A. Lichnerowicz, Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques, *Bull. Soc. Math. de France*, 1944, pp. 1-23.

[15] A. Lichnerowicz, Équations de Laplace et espaces harmoniques, *colloque équations aux dérivées partielles*, Louvain, 1953, pp. 9-23.

[16] A. Lichnerowicz, Sur certaines classes d'espaces riemanniens compacts, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 230 (1950), pp. 2416-2417.

[17] A. Lichnerowicz, Courbure, nombres de Betti et espaces symétriques, *Proceedings, Internat. Congress of Math.*, 1950, pp. 216-223.

[18] A. Lichnerowicz. Transformations infinitésimales conformes de certaines variétés riemanniennes, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 241 (1955), pp. 726-727.

[19] A. Lichnerowicz, Some problems on transformations of riemannian and kählerian manifolds, *notes miméographiées*, Princeton, 1955.

[20] A. Lichnerowicz, Homogeneous spaces and differential geometry, *notes miméographiées*, Princeton, 1957.

[21] T. Nagano, On conformal transformations of riemannian spaces, *Journal of the Math. Soc. of Japan*, vol. 10, n° 1, 1958.

[22] A. Nijenhuis, On the holonomy group of linear connections I general properties of affine connections, *Proc. Kon. Ned. Akad.*, 56 (1953), pp. 233-249, II Properties of general linear connections, *id.*, 57 (1954), pp. 17-25.

[23] G. De Rham, Sur l'irréductibilité d'un espace de Riemann, *Comm. Math. Helv.*, 21 (1952), pp. 328-343.

[24] J. A. Schouten, Ricci calculus, Springer, Berlin, 2e éd. (1954).

[25] T. Y. Thomas, The differential invariants of generalized spaces, *Cambridge University Press*, 1934.

[26] K. Yano, The theory of Lie derivaties and its applications, Amsterdam, 1955.

[27] K. Yano et S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, *Ann. of Math. Studies*, n° 32, Princeton, 1953.

TABLE DES MATIÈRES

Deuxième partie

TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES PROJECTIVES ET CONFORMES

CONES CONVEXES ET PYRAMIDES CONVEXES

par Andrée BASTIANI

INTRODUCTION

Ce travail reprend et généralise les résultats exposés dans le Séminaire de Topologie et Géométrie Différentielle (textes ronéotypés 1958-1959) et résumés dans deux Notes (C.R. Ac. Sc. 247, 1958, p. 1943, 248, 1959, p. 175). Le but est de définir dans un espace vectoriel de dimension infinie des ensembles qui aient certaines des propriétés des pyramides et des polyèdres convexes dans un espace vectoriel de dimension finie et d'en donner des applications à l'Analyse.

Le début du premier chapitre est consacré à une étude des facettes, variétés d'appui et cônes d'appui d'un ensemble convexe contenu dans un espace vectoriel topologique et de son polaire (la topologie qui sera utilisée le plus souvent est la topologie localement convexe la plus fine compatible avec la structure d'espace vectoriel, ou topologie fine). La fin de ce chapitre contient la définition et les propriétés des ensembles incompatibles et irréductibles de formes linéaires continues sur un espace vectoriel topologique, ce qui conduit aux notions de pseudo-base et base topologique d'un espace vectoriel topologique.

Le deuxième chapitre est la théorie des pyramides convexes dans un espace vectoriel muni de la topologie fine. Je montre que, dans un espace vectoriel de dimension finie on peut caractériser les pyramides convexes comme les cônes convexes dont le cône d'appui en tout point est fermé. Par définition, dans un espace vectoriel de dimension infinie, une pyramide

convexe sera un cône convexe ayant cette propriété; des exemples prouvent qu'une pyramide convexe peut ne pas avoir d'arêtes ni d'hyperplans d'appui extrême et que son polaire peut ne pas être une pyramide convexe. Dans une pyramide convexe tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un sous-espace d'appui extrême de dimension infinie. Une pyramide propre qui est une pyramide convexe telle que le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême soit fermé, est l'intersection de ses appuis extrêmes et son polaire est l'adhérence faible d'une pyramide convexe.

Le troisième chapitre traite du cas où E est un espace vectoriel topologique. Une pyramide convexe topologique est l'adhérence pour la topologie donnée sur E d'une pyramide convexe de E. Les pyramides topologiques les plus intéressantes sont les pyramides topologiques simpliciales qui sont l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base topologique de E; leur trace sur toute variété de codimension finie est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses arêtes. Cette propriété permet de retrouver et de généraliser certains résultats d'Analyse, en particulier sur les fonctions absolument monotones.

Les nombres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

I. — APPUIS DES CONES CONVEXES

1. Topologie fine.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur le corps des réels. Parmi toutes les topologies localement convexes compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E, il en existe une plus fine que les autres. Nous l'appellerons *topologie fine*. Cette topologie est séparée.

Pour cette topologie, un système fondamental de voisinages de l'origine est constitué des parties convexes, symétriques absorbantes de E. Un ouvert convexe est un ensemble dont la trace sur tout sous-espace de dimension finie est un ouvert convexe dans ce sous-espace. Les ouverts convexes forment une base pour la topologie fine.

Un ensemble fermé convexe coupe tout sous-espace de

dimension finie selon un ensemble fermé convexe de ce sous-espace. Inversement, dans le cas où E est de dimension dénombrable, tout ensemble dont la trace sur toute droite est un segment fermé est un ensemble fermé convexe pour la topologie fine.

E, muni de la topologie fine, est la limite inductive localement convexe de la famille des sous-espaces de dimension finie de E. Si E est la somme des sous-espaces E_i de dimension finie, E muni de la topologie fine est somme directe topologique des sous-espaces E_i.

Proposition. — *Tout sous-espace vectoriel de* E *est fermé dans* E *muni de la topologie fine. Le dual topologique de* E *muni de la topologie fine est identique à son dual algébrique* E^*.

Remarquons que toutes les topologies sur E^* compatibles avec la dualité entre E et E^* sont identiques à $\sigma(E^*, E)$. Nous appellerons topologie *algébriquement faible* la moins fine des topologies compatibles avec la structure vectorielle de E et pour lesquelles toute forme linéaire est continue.

Proposition. — *Tout ensemble de* E *borné pour une topologie localement convexe telle que toute forme linéaire soit continue est contenu dans un sous-espace de dimension finie de* E.

Il en résulte qu'une suite de points qui converge pour la topologie fine est contenue dans un sous-espace de dimension finie de E.

Définition. — Un ensemble C contenu dans E est *pseudo-borné* si sa trace sur tout sous-espace de dimension finie est bornée dans ce sous-espace.

Un ensemble convexe sera pseudo-borné si et seulement si il ne contient pas de demi-droite.

Si un ensemble convexe est borné pour une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, alors un tel ensemble est pseudo-borné.

Remarque. — Si E est un espace affine, on pourra de même définir la topologie fine comme la topologie dont les ouverts convexes sont les ensembles convexes dont la trace sur toute droite est un intervalle ouvert.

2. Facettes; appuis.

Soit C un ensemble convexe contenu dans l'espace vectoriel E, de dimension finie ou infinie sur le corps des réels.

Définition. — La facette $\mathcal{F}_x$ de C en un point x de C est la réunion des segments contenus dans E et dont x est point intérieur. La *facette d'une variété* V dans C est la réunion des facettes des points de $V \cap C$ dans C.

Si E est de dimension finie, C est la facette de l'un de ses points si C engendre E tout entier car tout ensemble convexe de dimension finie possède un point intérieur. Ceci n'est plus vrai dans le cas où E est de dimension infinie.

Soit E_x la variété affine de E engendrée par la facette $\mathcal{F}_x$. Si on munit E_x de la topologie fine, $\mathcal{F}_x$ est un voisinage de x dans E_x; $\mathcal{F}_x$ est l'intersection de E_x et de C. Tout point y qui appartient à la facette de x aura sa facette contenue dans la facette de x. La variété E_x est réduite au point x si et seulement si x est point extrémal de C. Remarquons que, dans le cas de dimension infinie, une réunion de facettes croissantes n'est plus une facette.

Définition. — Une *variété d'appui* de C est une variété qui, avec un point x de C, contient la facette de x dans C. Une *variété d'appui extrême* L de C est une variété d'appui de C qui est engendrée par la trace de C sur L.

Dans le cas de dimension infinie, une variété d'appui extrême peut ne pas être engendrée par la facette d'un de ses points.

La trace L′ d'une variété d'appui L de C sur un sous-espace E′ de E est une variété d'appui de la trace C′ de C; si L est une variété d'appui extrême de C, alors L′ est une variété d'appui extrême de C′. Inversement, si L′ est une variété d'appui de C′, c'est la trace sur E′ d'une variété d'appui L de C qui est engendrée par L′ et les facettes des points de $C' \cap L'$ dans C; si L′ est une variété d'appui extrême de C′, alors L est une variété d'appui extrême de C.

Soit C″ la projection de C sur une variété E″ de E, parallèlement à une variété d'appui M′ de C; la projection de toute variété d'appui de C parallèlement à M′ est une variété d'appui de C″ (qui peut être E″ entier); inversement toute variété d'appui M″ de C″ est la trace sur E″ de la variété d'appui M de C somme directe de M′ et de M″. Si M′ (resp. M″) est une

variété d'appui extrême de C (resp C″), alors M est aussi variété d'appui extrême de C′. Nous avons démontré :

PROPOSITION. — Si C′ *est une trace de* C, C″ *une projection de* C *parallèlement à une variété d'appui* M′ *de* C, *toute variété d'appui de* C′ *et de* C″ *est trace d'une variété d'appui de* C. *Si* M′ *est une variété d'appui extrême de* C, *toute variété d'appui extrême de* C′ *et de* C″ *est trace d'une variété d'appui extrême de* C.

PROPOSITION. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyperplan d'appui* H *d'un cône convexe* C *soit un hyperplan d'appui extrême de* C *est que, pour tout sous-espace* E_i *de dimension finie de* E, *il existe un sous-espace* E_j *contenant* E_i *et de dimension finie tel que la trace* H_j *de* H *sur* E_j *soit un hyperplan d'appui extrême de la trace* C_j *de* C *sur* E_j.

DÉMONSTRATION. — Si H est un hyperplan d'appui extrême de C, il existe une base de H formée de vecteurs portés par C; soit E_i un sous-espace de dimension finie, E_i' un sous-espace de dimension finie engendré par les vecteurs de cette base et contenant E_i. Si E_j est le sous-espace engendré par E_i' et par un vecteur situé hors de H, la trace de H sur E_i est un hyperplan d'appui extrême de C_j. Si E_j n'est pas contenu dans H, on se ramène à ce cas en prenant la trace de E_i sur H. Réciproquement, si H a la propriété énoncée et si H ∩ C n'engendre pas H, soit H″ le supplémentaire dans H du sous-espace engendré par H ∩ C; soit E_i un sous-espace de dimension finie dans H″; il existe E_j contenant E_i tel que la trace C_j engendre H_j et il y a contradiction.

DÉFINITION. — *Le cône d'appui d'un ensemble convexe* C *en un point* x *de* C est la réunion des demi-droites $[x, y \rightarrow)$, issues de x et passant par un point y de C différent de x. *Le cône d'appui de* C *autour d'une variété* V est la réunion des demi-variétés $[V, y \rightarrow)$, limitées par V et engendrées par V et un point y de C non situé dans V.

Le cône d'appui en x est identique à l'enveloppe convexe de la réunion de C et de la variété E_x engendrée par la facette de x dans C; c'est le cône d'appui de C autour de E_x. La variété engendrée par la facette de x dans le cône d'appui de C en x est identique à E_x.

Le cône d'appui de C autour de la variété V est l'enveloppe convexe de la réunion de C et de V; c'est aussi la somme directe de C et de V. La projection de C sur une variété V' parallèlement à V est la trace sur V' du cône d'appui de C autour de V.

Si E est muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel et si E est de dimension infinie, la variété engendrée par la facette d'un point x de C, où C est un ensemble convexe fermé, peut ne pas être fermée pour la topologie considérée. Quelle que soit la dimension de E, le cône d'appui de C en x n'est en général pas fermé. L'adhérence de ce cône est le *contingent de* C *en* x [4], qui peut être en tout point différent du cône d'appui. On ne change pas le cône d'appui en un point x d'un ensemble convexe C en remplaçant C par sa trace sur un voisinage de x dans E. Si le cône d'appui de C autour d'une variété V est fermé, l'image de C dans l'espace quotient de E par V est fermée; s'il existe un sous-espace supplémentaire topologique de V, alors la projection de C sur ce sous-espace parallèlement à V est fermée.

Proposition. *Un ensemble fermé convexe* C *est l'intersection des cônes d'appui de ses différents points dans un espace vectoriel topologique.*

Démonstration. — Si y appartient à tous les cônes d'appui de C en ses différents points et si z est un point de C, la trace de C sur la demi-droite $[z, y \rightarrow)$ est un segment fermé; soit x une de ses extrémités; le cône d'appui de C en x contient la demi-droite $[x, y \rightarrow)$ donc y appartient au segment $[x, z]$ et par suite à C.

Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété* V *soit variété d'appui d'un ensemble convexe* C *est que la variété* V *soit facette d'un point de* V *dans le cône d'appui de* C *autour de* V.

Supposons désormais que C est un cône convexe de sommet O dans l'espace vectoriel E et que C engendre E. La facette d'un point x de C contient la facette de O dans C, qui sera appelée *sommet généralisé*. Toute variété d'appui qui rencontre C est un sous-espace vectoriel qui contient le sommet généralisé. Une *arête* de C est la trace de C sur une droite d'appui extrême de C; une *face* de C est la trace de C sur un hyperplan

d'appui extrême de C ; elle peut n'être engendrée par la facette d'aucun de ses points dans le cas de dimension infinie.

L'ensemble des sous-espace d'appui de C est un ensemble inductif pour la relation d'inclusion. E est un élément maximal de cet ensemble. Il n'y a pas toujours un hyperplan d'appui : par exemple, soient E un espace vectoriel à base dénombrable, C le cône des points x de E dont la dernière coordonnée non nulle est positive ; C est un cône convexe dont O est point extrémal ; les sous-espaces d'appui sont les sous-espaces tels que $x_i = 0$ pour $i > p$; tous ces sous-espaces sont de dimension finie ; il n'y a pas de sous-espace d'appui de dimension infinie ; C est partout dense dans E muni de la topologie fine ; toute projection plane est fermée et identique à un plan.

L'ensemble des sous-espaces d'appui de C qui ne passent pas par une droite D donnée est aussi un ensemble inductif pour la relation d'inclusion. Un élément maximal de cet ensemble, V′, est un hyperplan d'appui si pour tout plan passant par D, la trace C′ du cône d'appui de C autour de V′ n'est pas un demi-plan limité par D ; en effet, si V′ n'était pas un hyperplan dans ce cas, le sous-espace engendré par la facette, dans le cône d'appui de C autour de V′, d'une droite d'appui de C′ autre que D (ou le sous-espace engendré par V′ et D′ si D′ n'appartient pas à C′) serait un sous-espace d'appui de C passant par V′ et ne contenant pas D.

Proposition. — *Soit* C *un cône convexe dans* E *et* V *un sous-espace d'appui de* C. *Si* V *ne contient pas une droite donnée* D, *il existe un hyperplan d'appui de* C *passant par* V *et ne contenant pas* D *sauf s'il existe une projection plane de* C *sur un plan orthogonal à* V *qui soit un demi-plan limité par* D.

Proposition. — *Si le cône d'appui* C′ *de* C *autour de* V *est facette d'un de ses points,* C *possède un hyperplan d'appui passant par* V.

Démonstration. — Soit D une demi-droite dont la facette dans C′ est C′ ; la trace C″ de C′ sur un sous-espace passant par D supplémentaire à V est un cône convexe dont O est point extrémal et qui est la facette de D. Aucune projection plane de C″ n'est un demi-plan limité par D et il existe un hyperplan d'appui de C passant par V d'après la proposition précédente.

Corollaire 1. — *Si* C *est facette d'un de ses points,* C *possède un hyperplan d'appui. En particulier, tout cône convexe de dimension finie possède un hyperplan d'appui.*

Démonstration. — On se ramène au cas précédent en prenant pour V le sommet généralisé de C. Si E est un espace vectoriel topologique, et si C est un cône convexe engendré par un ouvert de E qui ne contient pas O, l'intérieur de C est identique à son intérieur pour la topologie fine ([2], ex. 3f p. 67); il existe un hyperplan d'appui d'après le corollaire et cet hyperplan est tel que l'intérieur de C soit entièrement contenu dans un des demi-espaces qu'il détermine, donc c'est un hyperplan fermé.

On retrouve ainsi le théorème de Hahn-Banach.

Corollaire 2. — *Si* C *possède un sous-espace d'appui de codimension finie* V, *il possède un hyperplan d'appui.*

Démonstration. — Une projection de C parallèlement à V est un cône convexe C′ de dimension finie; soit V′ un hyperplan d'appui de C′. L'hyperplan V + V′ est un hyperplan d'appui de C.

Corollaire 3. — *Si* C *est facette d'un de ses points et si l'adhérence de toute projection plane de* C *est un angle saillant, tout sous-espace d'appui* V *est l'intersection* $\mathcal{H}$ *des hyperplans d'appui qui le contiennent.*

Démonstration. — Soit D une droite qui appartient à $\mathcal{H}$ et non à V. Alors il existe un sous-espace d'appui maximal V′ qui contient V et non D. Si V′ n'est pas un hyperplan, soit C′ la trace sur un plan passant par D du cône d'appui de C autour de V′; c'est un angle saillant qui possède une droite d'appui extrême D′ différente de D; le sous-espace engendré par V′ et D′ (ou la facette de D′ dans C′ si D′ appartient à C′) est un sous-espace d'appui extrême de C qui contient V′ et non D et V′ est hyperplan d'appui de C, donc D $\notin \mathcal{H}$.

Remarque. — Il existe des cônes convexes n'ayant qu'un seul hyperplan d'appui : un demi-espace ouvert auquel on ajoute l'origine est un cône convexe dont O est point extrémal et qui a pour seul hyperplan d'appui l'hyperplan qui le limite.

Si E est un espace vectoriel ayant une base dénombrable, l'ensemble des points dont la première coordonnée non nulle est positive est un cône convexe de sommet O dont le seul hyperplan d'appui est un hyperplan d'appui extrême; tout sous-espace d'appui extrême est de dimension infinie.

L'ensemble des sous-espaces d'appui extrême d'un cône convexe C est un ensemble inductif pour la relation d'inclusion car le sous-espace engendré par la réunion d'une famille croissante de sous-espaces d'appui extrême est un sous-espace d'appui extrême. L'ensemble des sous-espaces d'appui extrême ne contenant pas une droite donnée D est aussi un ensemble inductif pour cette relation, donc il existe un sous-espace d'appui extrême maximal ne contenant pas D, mais la dimension de ce sous-espace est quelconque.

Proposition. — *Soit* C *un cône convexe,* L *un sous-espace d'appui extrême ne contenant pas une droite donnée* D; *pour que* L *soit contenu dans un hyperplan d'appui extrême ne contenant pas* D, *il faut et il suffit qu'il existe une projection plane de* C *sur un plan contenant* D *qui admette une demi-droite d'appui extrême autre que* D.

Démonstration. — Soit L′ le sous-espace d'appui extrême maximal de C qui contient L et non D; si L′ n'est pas un hyperplan, la trace du cône d'appui de C autour de L′ sur tout plan passant par D n'admet pas de droite d'appui extrême autre que D, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Proposition. — *Si* C *est facette d'un de ses points, est fermé pour la topologie fine et si toute projection plane de* C *est un angle saillant fermé,* C *est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent et qui sont limités par un hyperplan d'appui extrême. Tout sous-espace d'appui extrême est l'intersection des hyperplans d'appui extrême qui le contiennent.*

Démonstration. — Soit L un sous-espace d'appui extrême de C, D une demi-droite intérieure à C; si un sous-espace d'appui extrême maximal L′ qui contient L et non D n'est pas un hyperplan, toute projection plane de la projection C′ de C parallèlement à L′ sur un sous-espace passant par D est un angle saillant fermé qui possède une droite d'appui extrême

$D' \neq D$ projection d'une génératrice Δ de C'; le sous-espace engendré par la facette de Δ dans C est un sous-espace d'appui extrême de C qui contient L' et non D. Il en résulte que tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un hyperplan d'appui extrême et est l'intersection des hyperplans d'appui extrême qui le contiennent même si C n'est pas fermé. Soit $\mathcal{H}$ l'intersection de tous les demi-espaces limités par un hyperplan d'appui extrême de C et contenant C, et D_1 une droite qui appartient à $\mathcal{H}$ et non à C, M la droite d'appui extrême de la trace de C sur le plan passant par D_1 et D, et qui sépare D_1 et D; par la facette de M dans C il passe un hyperplan d'appui extrême de C qui ne contient pas D et tel que le demi-espace qui contient C ne contienne pas D.

Supposons désormais E muni d'une topologie d'espace localement convexe compatible avec la structure vectorielle.

Proposition. — *Soit* C *un cône convexe dans* E *qui ne coupe aucun plan selon un demi-plan. Si le cône d'appui de* C *autour de toute droite est fermé,* C *est fermé.*

Démonstration. — Soit d une demi-droite qui n'appartient pas à C mais qui est adhérente à C. Soient D la droite qui contient d, et E_0 le sous-espace engendré par la facette de D dans le cône d'appui de C autour de D; par hypothèse le cône d'appui de C autour de D est fermé; si D_1 est une droite d'appui de la trace de C sur un plan E_1 contenu dans E_0 et passant par D, le demi-plan ouvert limité par D_1 et contenant d ne contient aucun point de C, ce qui est impossible. Si E_0 se réduit à la droite D, il existe un plan passant par D et qui ne rencontre pas C; si D_1 est une droite de ce plan, le cône d'appui de C autour de D_1 n'est pas fermé.

Définition. — Un sous-espace d'appui L d'un cône convexe C appelé un sous-espace d'*appui strict* si la trace de C sur L est le sommet généralisé de C.

Proposition. — *Soit* C *un cône convexe fermé dans* E *dont* O *est point extrémal; le cône d'appui de* C *autour de tout sous-espace d'appui strict* M *de dimension finie est fermé.*

Démonstration. — Soit D une demi-droite adhérente au cône d'appui mais qui ne lui appartient pas; pour tout voisi-

nage symétrique V de O, une variété N du sous-espace M′ engendré par D et M, parallèle à M et rencontrant D coupe $V + C$; soit $C_V = (\overline{C + V}) \cap N$; C_V est un ensemble fermé dans N qui, pour V assez petit, ne rencontre pas M; lorsque V varie, dans l'espace complet N de dimension finie l'intersection des ensembles fermés bornés C_V est non vide; comme $\overline{C + V} \subset C + 2V$, cette intersection appartient à C, donc il existe un point y dans $C \cap N$ et le cône d'appui considéré contient le sous-espace passant par y et M.

Dans le cas où E est de dimension finie, cette proposition résulte de la compacité dans l'ensemble des demi-droites.

Remarque. — Même dans le cas de dimension finie, un cône convexe dont le cône d'appui autour de toute droite est fermé peut ne pas être fermé; ainsi un demi-plan dans R^2 dont on a ôté une des demi-droites d'appui extrême n'est pas fermé.

Si O est point extrémal d'un cône convexe C et si C possède un hyperplan d'appui strict H, la trace de C sur un hyperplan affine parallèle à H est un ensemble convexe pseudo-borné. S'il n'existe pas d'hyperplan d'appui strict de C, aucune section de C par un hyperplan n'est pseudo-bornée.

3. Famille de formes:

Définition. — Un *appui* d'un cône convexe C de sommet O dans un espace vectoriel topologique localement convexe E est un demi-espace limité par un hyperplan d'appui fermé de C et qui contient C. Toute forme linéaire continue qui s'annule sur un hyperplan d'appui est une *forme d'appui*. On définit de même *appui extrême*, *forme d'appui extrême*, *appui strict forme d'appui strict*.

Soit H un hyperplan d'appui de C; cet hyperplan est l'ensemble des points x de E tels que $\langle h, x\rangle = 0$. L'appui correspondant de C sera l'ensemble des points x de E tels que $\langle h, x\rangle \geqslant 0$ si, pour tout $c \in C$, on a $\langle h, c\rangle \geqslant 0$.

L'ensemble de toutes les formes linéaires continues qui sont positives ou nulles (resp. nulles) pour tout point de C est le *polaire de* C (rep. l'orthogonal de C) noté C^0 (resp. $C^{\perp}$); C^0 est un cône convexe dans le dual topologique de E, fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Si E est muni de la topologie fine, C^0 est un cône convexe dans le dual algébrique E^* de E; $C^{\perp}$ est le

sommet généralisé de C^0. Si Γ est un ensemble quelconque de E, son polaire est le polaire du cône convexe de sommet O qu'il engendre. Si l'espace vectoriel topologique qui contient Γ est le dual topologique E' d'un espace vectoriel topologique et que la topologie considérée sur E' n'est pas compatible avec la dualité entre E et E' (si elle est plus fine que la topologie de Mackey τ (E', E) [3]), nous appellerons *polaire* de Γ *dans* E (resp. *orthogonal de* Γ *dans* E), la trace sur E du polaire (resp. orthogonal) de Γ dans le dual topologique E'' de E' muni de la topologie donnée; ce cas se présentera si E et E^* sont munis de la topologie fine.

Le polaire de Γ^0 contient l'enveloppe convexe de Γ et de l'ensemble réduit à 0. Si Γ est un ensemble contenu dans l'espace vectoriel topologique E dont le dual topologique est E', Γ^0 est l'enveloppe fermée convexe de Γ et de $\{O\}$ pour la topologie $\sigma(E, E')$.

PROPOSITION. — *Soit* C *un cône convexe qui engendre l'espace vectoriel* E *muni de la topologie fine,* C^0 *son polaire. La facette dans* C^0 *d'une forme* f *qui s'annule sur un hyperplan* F *est la trace sur* C_0 *de l'orthogonal de la trace* C' *de* C *sur* F.

DÉMONSTRATION. — Soit h une forme d'appui de C qui s'annule sur C' et H l'hyperplan sur lequel s'annule h; l'intersection G de H et de F est un sous-espace d'appui de codimension 2 de C qui contient C'. Le cône d'appui G' de C autour de G est un cône dont O est point extrémal et qui admet pour hyperplans d'appui F et H; il s'ensuit que G' est contenu strictement dans un demi-espace et qu'il possède un hyperplan d'appui H' différent de H et de F. Si h' est une forme qui s'annule sur F', on a $h' = \lambda f + (1 - \lambda)h$ avec $O < \lambda < 1$ et h' appartient à la facette de f dans C. Inversement toute forme h qui appartient à cette facette est telle qu'il existe une forme h' telle que $f = \lambda\, h + (1 - \lambda)h'$ et si x appartient à C', on devra avoir $\langle h, x\rangle = \langle h', x\rangle = 0$.

COROLLAIRE 1. — *Si* f *est une forme d'appui extrême de* C, $[O, f \rightarrow)$ *est une arête de* C^0.

En effet C' engendre F et toute forme d'appui de C qui s'annule sur C' est proportionnelle à f, donc la facette de f dans C^0 est $[0, f \rightarrow)$ qui est une arête de C^0.

Corollaire 2. — *Pour que* C *possède un hyperplan d'appui strict, il faut que* C^0 *soit facette d'un de ses points. Si* C^0 *est facette d'un de ses points et si* C *est l'intersection de ses appuis, alors* C *possède un appui strict.*

En effet, si f est une forme d'appui strict de C, alors C′ engendre le sommet généralisé S de C et tout hyperplan d'appui de C contient S. Si C est l'intersection de ses appuis, le sommet généralisé S est l'intersection de tous les hyperplans d'appui et une forme f dont C^0 est la facette est une forme d'appui strict.

En particulier, tout cône convexe fermé saillant dans un espace de dimension finie possède un hyperplan d'appui strict.

Remarquons qu'une arête de C^0 peut ne pas être engendrée par une forme d'appui extrême de C dans le cas où il n'y a pas d'hyperplan d'appui extrême qui passe par C′.

Définition. — Deux ensembles du dual topologique E′ d'un espace vectoriel topologique E sont *équivalents* (resp. *équivalents pour les inégalités*) si leurs orthogonaux dans E (resp. polaires dans E) coïncident.

Définition. — Un ensemble Ω de formes linéaires continues ω_i définies sur un espace vectoriel topologique E est *incompatible* si $\langle \omega_i, x \rangle = 0$ pour tout $\omega_i \in \Omega$ entraîne $x = 0$. L'ensemble Ω est *irréductible* (resp. *irréductible pour les inégalités*) si pour tout $\omega_i \in \Omega$ il existe $x \in$ E tel que $\langle \omega_j, x \rangle = 0$ pour tout $\omega_j \neq \omega_i$, $\langle \omega_i, x \rangle \neq 0$ (resp. $\langle \omega_j, x \rangle \geqslant 0$ pour tout $\omega_j \neq \omega_i$, $\langle \omega_i, x \rangle < 0$).

Ainsi, si E est un espace vectoriel topologique, E′ son dual topologique, un *ensemble* Ω *de* E′ *est incompatible s'il est total pour la topologie* σ (E′, E), *il est irréductible s'il est topologiquement libre pour la topologie* σ (E′, E). Cette notion dépend seulement de la dualité entre E et E′. En particulier E est le dual topologique de E′ muni de la topologie σ (E′, E); un *ensemble incompatible de* E *sera un ensemble total dans* E pour la topologie σ (E, E′) et par suite un ensemble total dans E pour n'importe quelle topologie compatible avec la dualité entre E et E′. Un *ensemble irréductible dans* E *sera un ensemble topologiquement libre* dans E muni d'une topologie comprise entre σ (E, E′) et τ (E, E′).

Si E′ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie

τ (E′, E), tout ensemble total pour $\mathfrak{T}$ est incompatible, mais un ensemble incompatible peut ne pas être total pour $\mathfrak{T}$; par exemple dans un espace préhilbertien une famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ telle que $(x|e_i) = 0$ pour tout $i \in I$ entraîne $x = 0$ n'est pas forcément totale. Tout ensemble irréductible est topologiquement libre pour $\mathfrak{T}$ mais un ensemble topologiquement libre pour $\mathfrak{T}$ peut ne pas être irréductible.

Si un ensemble irréductible est maximal, il est incompatible. On ne peut pas toujours extraire d'un ensemble incompatible un ensemble irréductible et incompatible équivalent : si E est un espace vectoriel muni de la topologie fine, et si $(e_i)_{i \in I}$ est une base algébrique de E, l'ensemble des formes linéaires ω_i telles que :

$$\langle \omega_j, e_i \rangle = \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} = \mu_i^j, \qquad \mu_k \neq \mu_l \quad \text{si } k \neq l$$

est un ensemble incompatible et tout sous-ensemble infini est incompatible mais non irréductible (les λ_{ij} sont les termes d'un tableau de Van-der-Monde et toute matrice extraite de ce tableau a un déterminant nul).

Soit Ω un ensemble incompatible et irréductible du dual topologique E′ d'un espace vectoriel topologique E; supposons qu'il existe x et $y \in$ E tels que :

$$\langle \omega_i, x \rangle = \langle \omega_i, y \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad \omega_i \in \Omega, \quad \omega_i \neq \omega_j$$
$$\langle \omega_j, x \rangle = \lambda \langle \omega_j, y \rangle \neq 0$$

alors $\langle \omega_i, x\text{-}\lambda y \rangle = \langle \omega_j, x\text{-}\lambda y \rangle = 0$ et $x = \lambda y$

Par suite à tout ensemble incompatible et irréductible Ω on peut associer d'une manière unique l'ensemble des vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ de E tels que :

$$\langle \omega_i, e_i \rangle = 1, \quad \langle \omega_j, e_i \rangle = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq j, \quad \omega_i, \quad \omega_j \in \Omega$$

l'ensemble des vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ est la *pseudo-base topologique* associée à Ω.

Exemples de pseudo-bases topologiques: Si E est un espace vectoriel muni de la topologie fine, toute base algébrique est une pseudo-base topologique; une pseudo-base topologique de E qui n'est pas une base algébrique sera appelée plus brièvement *pseudo-base.* Dans un espace de Hilbert toute base orthonormale est une pseudo-base topologique. Si E est l'espace $L^1(N)$ des suites absolument sommable, l'ensemble

des suites dont tous les termes sont nuls sauf un qui vaut 1 est une pseudo-base topologique pour la topologie définie par la norme $\|x\| = \sum_{i \in I} |x_i|$ par exemple.

Une pseudo-base topologique est un ensemble topologiquement libre dans l'espace vectoriel topologique E, mais à tout ensemble topologiquement libre on ne peut pas associer un ensemble incompatible et irréductible. Une pseudo-base topologique peut ne pas être totale : soit $(e_i)_{i \in I}$ une base algébrique d'un espace vectoriel E, $(\omega_i)_{i \in I}$ l'ensemble incompatible et irréductible correspondant, E_1 l'espace vectoriel somme de E et de Re_0 muni de la topologie fine; l'ensemble des formes linéaires $\overline{\omega}_i$ dont la restriction à E est ω_i et qui prennent la valeur 1 en e_0 est un ensemble incompatible et irréductible dans le dual algébrique de E; la pseudo-base topologique associée dans E_1 est l'ensemble $(e_i)_{i \in I}$ qui n'est pas total dans E_1. Remarquons que, dans cet ensemble, le polaire de l'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ dans E_1 a pour hyperplan d'appui l'hyperplan E; soit ω_0 une forme qui s'annule sur E; l'ensemble $(\omega_0, (\overline{\omega}_i)_{i \in I})$ est équivalent pour les inégalités à l'ensemble irréductible et incompatible $(\overline{\omega}_i)_{i \in I}$, sans être lui-même irréductible.

Soit E un espace vectoriel topologique, $(e_i)_{i \in I}$ une pseudo-base topologique associée à l'ensemble incompatible et irréductible $(\omega_i)_{i \in I}$ de E'. Si on munit E de n'importe quelle topologie qui rende continues les formes ω_i, même si E' n'est plus le dual topologique de E l'ensemble $(e_i)_{i \in I}$ reste une pseudo-base topologique. La moins fine des topologies pour lesquelles $(e_i)_{i \in I}$ est une pseudo-base topologique de E est la Ω-topologie, c'est-à-dire la topologie dont un système fondamental de voisinages de l'origine sera constitué des ensembles V_J, où V_J est l'ensemble des points y de E tels que :

$$|\langle \omega_i, y \rangle| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } i \in J, \qquad J \text{ fini dans } I.$$

L'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ étant total dans E' muni de la topologie $\sigma(E', E)$, cette Ω-topologie est séparée (car c'est la Ω-topologie sur $E = \mathcal{L}(E', R)$ voir [3]).

Proposition. — *Si* E *est muni de la* Ω*-topologie, la pseudo-base topologique associée à* Ω *est totale et tout point est somme de la famille sommable* $(\langle \omega_i, x \rangle e_i)_{i \in I}$.

Démonstration. — Soit $x_i = \langle \omega_i, x \rangle$. Un point x est entièrement déterminé par la donnée de la famille $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de ses *coordonnées*. Un voisinage $\mathrm{V_J}$ de x contient toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i \in \mathrm{J}'} x_i e_i$ où J' est un ensemble fini d'indices contenant J, donc la famille $(x_i e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ a pour somme x. Il s'ensuit que l'ensemble $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est total dans E muni de la Ω-topologie. Cette proposition ne reste plus vraie si l'on remplace la Ω-topologie par une topologie plus fine.

Remarques. — 1) Soit E un espace vectoriel topologique, E' son dual topologique, $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une pseudo-base topologique de E totale dans E; alors l'ensemble $(\omega_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est la pseudo-base topologique associée à l'ensemble incompatible et irréductible $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de E et c'est une pseudo-base topologique totale pour toute topologie sur E' compatible avec la dualité entre E et E'; ainsi *dans le dual algébrique* E^* *d'un espace vectoriel* E, *il existe toujours des pseudo-bases topologiques totales pour* $\sigma(\mathrm{E}^*, \mathrm{E})$.

2) L'existence d'une pseudo-base topologique dans un espace vectoriel topologique est conditionnée par l'existence d'un ensemble total et topologiquement libre dans son dual topologique.

3) Soient E un espace vectoriel topologique ayant une pseudo-base topologique $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$, E' son dual topologique. E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{R}^{\mathrm{E}'}$. L'application φ qui a un point x de E fait correspondre le point de $\mathrm{R}^{\mathrm{E}'}$ (ou de R^{I}) de coordonnées $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une application biunivoque de E sur un sous-espace vectoriel F de $\mathrm{R}^{\mathrm{I}} \subset \mathrm{R}^{\mathrm{E}'}$. Si on munit $\mathrm{R}^{\mathrm{E}'}$ de la Ω-topologie (où $\Omega = (\omega_i)_{i \in \mathrm{I}}$, ensemble irréductible et incompatible auquel est associée $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$), R^{I} est muni de la topologie produit et F sera un sous-espace vectoriel topologique de R^{I} (qui contient le sous-espace $\mathrm{R}^{(\mathrm{I})}$ des points n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées différentes de 0 si la pseudo-base topologique est totale; l'application φ sera un isomorphisme de E sur F. Comme deux pseudo-bases topologiques ne sont pas toujours équipotentes, la donnée de E ne détermine pas complètement F. Un espace vectoriel topologique possède une pseudo-base topologique s'il existe un espace R^{I} tel que E soit isomorphe à un sous-espace vectoriel de R^{I}, muni de la topologie induite par la topologie produit ou une topologie plus fine sur R^{I}, le sous-espace $\mathrm{R}^{(\mathrm{I})}$ étant partout dense dans F pour la topologie

induite si l'on veut que la pseudo-base topologique soit totale dans E; on pourra prendre un sous-espace vectoriel F partout dense dans R^I pour la topologie considérée. Si F est supposé fermé dans R^I pour la topologie produit l'espace E qui lui correspond est un espace de type minimal ([3], ex. 13, p. 61), c'est-à-dire que sa topologie est la moins fine des topologies localement convexes compatibles avec sa structure d'espace vectoriel. *Ainsi tout espace vectoriel topologique* E *sur lequel il existe une topologie minimale possède une pseudo-base topologique totale.*

Proposition. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique,* $(e_i)_{i\in I}$ *un ensemble total et topologiquement libre,* $(\omega_i)_{i\in I}$ *la pseudo-base topologique associée dans le dual topologique* E' *de* E; *alors* $(e_i)_{i\in I}$ *est une pseudo-base topologique totale si et seulement si la* Ω*-topologie est séparée; par contre* $(e_i)_{i\in I}$ *est une pseudo-base topologique totale dans le dual topologique* E_1 *de l'espace vectoriel* E' *muni de la* $(e_i)_{i\in I}$*-topologie.*

Démonstration. — Si $(e_i)_{i\in I}$ est une pseudo-base topologique, $(\omega_i)_{i\in I}$ est un ensemble total dans E' muni de la topologie σ (E', E) et la Ω-topologie est séparée. La même démonstration que précédemment montre que si $(e_i)_{i\in I}$ est un ensemble total et topologiquement libre de E, tout point x de E est somme de la famille sommable $(\langle\omega_i, x\rangle e_i)$ pour la Ω-topologie; dire que E muni de cette topologie est un espace de Hausdorff signifie que $x_i = 0$ pour tout $i \in I$ entraîne $x = \sum_{i\in I} 0e_i = 0$, donc l'ensemble $(\omega_i)_{i\in I}$ est incompatible et $(e_i)_{i\in I}$ est une pseudo-base topologique. Si on munit E' de la $(e_i)_{i\in I}$-topologie qui est séparée puisque $(e_i)_{i\in I}$ est total dans E, alors $(\omega_i)_{i\in I}$ devient une pseudo-base topologique totale d'après la proposition précédente, donc un ensemble incompatible pour le dual topologique E_1 de E; il en résulte que $(e_i)_{i\in I}$ est une pseudo-base topologique dans E_1 qui est partout dense dans E.

Dans le cas où $(e_i)_{i\in I}$ est une base algébrique de E muni de la topologie fine, la $(e_i)_{i\in I}$-topologie est identique à la topologie $\sigma(E^*, E)$. Mais E_1 peut différer de E; en particulier, soit E un espace vectoriel topologique, $(e_i)_{i\in I}$ une pseudo-base topologique totale de E, F un espace vectoriel topologique quelconque, E_2 l'espace somme directe de E et de F, p la projection cano-

nique de E_2 sur E; munissons E_2 de la topologie image réciproque de la topologie de E par p; soit $(e'_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E_2 telle que e'_i se projette sur e_i; l'ensemble des vecteurs e'_i est total et topologiquement libre dans E_2, mais tout point de F a toutes ses coordonnées nulles par rapport à ces vecteurs, donc $(e_i)_{i\in I}$ n'est pas une pseudo-base topologique de E_2. Ici, E_2 n'est pas un espace de Hausdorff.

Définition. — Soit E un espace vectoriel topologique, E′ son dual topologique. Une *base topologique* $(e_i)_{i\in I}$ de E est un ensemble topologiquement libre tel que tout point x de E soit somme d'une famille sommable $(\xi_i e_i)_{i\in I}$ pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition. — *Une base topologique est une pseudo-base topologique $(e_i)_{i\in I}$ telle que la famille $(x_i e_i)_{i\in I}$ soit sommable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Démonstration. — L'ensemble $(e_i)_{i\in I}$ est un ensemble total et topologiquement libre, donc un ensemble incompatible et irréductible; soit $(\omega_i)_{i\in I}$ la pseudo-base topologique associée dans E′. Comme ω_i est une forme continue de E, $\langle\omega_i, x\rangle$ est la limite des valeurs $\left\langle\omega_i, \sum_{j\in J}\xi_j e_j\right\rangle$ suivant le filtre des sections de l'ensemble des parties finies J de I, et $\langle\omega_i, x\rangle = \xi_i = x_i$ pour tout $i \in I$. Si pour un $x \in E$, on avait $x_i = 0$ pour tout $i \in I$, E étant séparé, $x = 0$ donc l'ensemble irréductible $(\omega_i)_{i\in I}$ est un ensemble incompatible et $(e_i)_{i\in I}$ est la pseudo-base topologique associée.

Exemples de bases topologiques: Toute pseudo-base topologique dans un espace vectoriel muni de la Ω-topologie; toute base algébrique dans un espace vectoriel muni de la topologie fine; toute base orthonormale dans un espace de Hilbert; la pseudo-base topologique considérée dans $L^1(N)$.

Proposition. — *Si un espace vectoriel topologique possède une base topologique, il en est de même pour tout sous-espace vectoriel de codimension finie.*

Démonstration. — Faisons un raisonnement par récurrence. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base topologique de E, H_n un sous-espace vectoriel de E de codimension n; supposons que tout sous-espace

vectoriel de codimension $n-1$ possède une pseudo-base topologique. Soit H_{n-1} un tel sous-espace qui contient H_n, $(e'_i)_{i\in I'}$ une base topologique de H_{n-1}, e'_p un vecteur de cette base non situé dans H_n. Le plan passant par e'_p et e'_j coupe H_n selon un vecteur e''_j; l'ensemble $(e''_j)_{j\in I'-\{p\}}$ est un ensemble topologiquement libre. Un système fondamental de voisinages V_{n-1} d'un point x dans H_{n-1} est obtenu en prenant le produit d'un voisinage V_n de x dans H_n et d'un voisinage de 0 dans Re'_p; un tel voisinage contient au moins une combinaison linéaire des vecteurs e'_i qui peut s'exprimer comme une combinaison linéaire $x'_pe'_p + \sum_{j\in J} x''_je''_j$. Tout voisinage de x dans H_n contient la trace d'un voisinage V_{n-1} donc contient la combinaison linéaire $\Sigma x''_je''_j$ considérée ci-dessus. Ainsi la famille $(x''_je''_j)$ est sommable et $(e''_j)_{j\in I'-\{p\}}$ est une base topologique pour H_n.

Proposition. — *Si* E *est un espace vectoriel topologique métrisable pour la topologie* $\sigma(E, E')$, *toutes les bases topologiques ont même puissance.*

Démonstration. — Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_j)_{j\in J}$ deux bases topologiques, $(\omega_i)_{i\in I}$ et $(\omega'_j)_{j\in J}$ les ensembles incompatibles et irréductibles correspondants. L'ensemble A_{e_i} des formes ω'_j qui ne s'annulent pas sur le vecteur e_i est un ensemble dénombrable car la famille $(\langle\omega'_j, e_i\rangle e'_j)$ étant sommable dans l'espace métrisable E, chaque point a au plus une infinité dénombrable de coordonnées non nulles. Pour toute forme ω'_j il existe un vecteur e_i tel que $\langle\omega'_j, e_i\rangle \neq 0$ puisque l'ensemble $(e_i)_{i\in I}$ est total. Ainsi l'ensemble $(\omega'_j)_{j\in J}$ est la réunion des ensembles A_{e_i} dénombrables lorsque i parcourt I; par suite la puissance de $(\omega'_j)_{j\in J}$ est inférieure à la puissance de $(e_i)_{i\in I}$ et, en faisant le raisonnement inverse on prouve que les deux bases sont équipotentes.

Remarquons que si E est métrisable pour $\sigma(E, E')$, alors $\sigma(E, E')$ et $\tau(E, E')$ sont identiques (voir [3]). Ce théorème reste vrai si E est métrisable pour une topologie $\mathcal{T}$ et que les bases considérées sont telles que la famille (x_ie_i) soit sommable pour cette topologie; c'est ce qui se produit dans le cas d'une base orthonormale d'un espace hilbertien.

II. — POLYÈDRES ET PYRAMIDES CONVEXES

1. Polyèdres et pyramides convexes dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Soit R^n l'espace vectoriel à n dimensions.

Définition. — Une *pyramide convexe* $h(S)$ de sommet 0 est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini S de demi-droites $[0, z \rightarrow)$. Si le sous-espace vectoriel engendré par S est R^n, S est *non dégénéré.*

Si S est non dégénéré, un hyperplan d'appui extrême de $h(S)$ contient $(n-1)$ droites linéairement indépendantes de S : soit S' l'ensemble des formes d'appui extrêmes : S' est la réunion d'un ensemble fini de demi-droites.

Si S est dégénéré, un *hyperplan d'appui extrême impropre* est un hyperplan d'appui dont la trace sur le sous-espace engendré par S est une hyperplan d'appui extrême de S. Rappelons les résultats suivants :

Une pyramide convexe est l'intersection de ses appuis extrêmes (propres et impropres) : le polaire de S est l'enveloppe convexe de S'. Il en résulte que le polaire d'une pyramide convexe est une pyramide convexe même si S est dégénéré et que pour qu'un ensemble fermé soit une pyramide convexe il faut et il suffit qu'il soit l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.

Les faces d'une pyramide convexe sont des pyramides convexes; toute facette de dimension k est face d'une facette de dimension $k+1$. Si d est la dimension de la facette de O dans S, pour tout l compris entre d et $p-1$ où p est la dimension du sous-espace engendré par S, il existe au moins une facette de dimension l; en particulier, si $d=0$ la pyramide convexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes. Le polaire de S engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$. Les formes d'appui extrême impropres sont les points de la facette de O dans le polaire de S, les formes d'appui extrême propres sont les points dont les facettes engendrent un sous-espace vectoriel de dimension $n-d+1$ dans le polaire de S. L'ensemble des formes d'appui de la pyramide convexe qui s'annulent sur une facette qui engendre un sous-

espace vectoriel de dimension k est une facette de l'enveloppe convexe de S' qui engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$.

Si la pyramide convexe engendre un sous-espace de dimension p, la facette du sommet de S' engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$.

DÉFINITION. — Un *polyèdre convexe* P est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces affines.

Plongeons R^n dans un espace vectoriel E à $(n+1)$ dimensions de sorte que R^n soit l'hyperplan affine ensemble des points x tels que : $\langle \omega_0, x\rangle = 1$. Alors P est l'intersection d'une pyramide convexe P' avec R^n. Cette pyramide convexe est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E engendrés par les sous-espaces affines qui définissent P. Soit P'_+ l'intersection de P' avec le demi-espace $\langle \omega_0, x\rangle \geqslant 0$; le polyèdre convexe est aussi l'intersection de P'_+ avec R^n.

Pour que le polyèdre P soit borné, il faut et il suffit que le point ω_0 soit intérieur au polaire de P.

Soit $\overline{R}^n$ l'espace R^n complété par les points à l'infini, qui correspondent d'une manière biunivoque aux demi-droites d'origine O situées dans l'hyperplan E_0 défini comme l'ensemble des points x tels que $\langle \omega_0, x\rangle = 0$. Les points de R^n sont dits *points propres* de $\overline{R}^n$, les autres points sont *impropres*. Un polyèdre convexe P dans R^n est complété dans $\overline{R}^n$ en ajoutant les points correspondants aux directions des demi-droites contenues dans P. Soit $\overline{P}$ le complété de P ; alors $\overline{P}^n$ correspond d'une façon biunivoque à P'_+. Nous définissons la notion de *segment* dans $\overline{R}^n$ de la façon suivante :

1) Si x et y sont propres, le segment qui les joint dans $\overline{R}^n$ est le segment qui les joint dans R^n.

2) Si x est propre et y impropre, le segment qui les joint est la demi-droite d'origine x, parallèle à la demi-droite d'origine O qui définit y.

3) Si x et y sont impropres, le segment qui les joint est l'ensemble des demi-droites du cône engendré par les demi-droites d'origine O qui définissent x et y. Si x et y sont deux demi-droites opposées, le segment qui les joint se réduit par définition au couple (x, y).

Étant donné un ensemble $\overline{A}$ contenu dans $\overline{R^n}$, son enveloppe convexe sera la réunion des segments joignant deux points quelconques de $\overline{A}$. Les points impropres de cette enveloppe convexe forment l'enveloppe convexe des points impropres de $\overline{A}$.

Proposition. — *Tout polyèdre convexe* P *de* R^n *est la trace sur* R^n *de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points propres ou impropres de* $\overline{R^n}$.

Démonstration. — P'_+ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de demi-droites, donc $\overline{P}$ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\overline{R^n}$. Plus précisément : soit $\mathcal{F}'_0$ la facette de O dans P', $\mathcal{F}''_0 = \mathcal{F}'_0 \cap E_0$ est la facette de O dans $P'' = P'_+ \cap E_0$. Soit H un sous-espace supplémentaire au sous-espace engendré par $\mathcal{F}''_0$ dans E. La trace de P'_+ sur H est une pyramide convexe, enveloppe convexe de l'ensemble fini des arêtes $[O, A_i \rightarrow)$, où $A_i \in R^n$ et de $H \cap P''$. La pyramide convexe P'_+ est l'enveloppe convexe de P'' et des arêtes $[O, A_i \rightarrow)$. Les points A_i sont déterminés modulo $\mathcal{F}''_0$.

Les points A_i engendrent un polyèdre convexe borné P_1 dans R^n. Le polyèdre convexe P est la somme dans E de P_1 et de P'', qui correspond à l'ensemble des points impropres de $\overline{P}$. La facette dans P d'un point A_i engendre le sous-espace affine translaté du sous-espace engendré par la facette $\mathcal{F}''_0$ de O dans P''. Ce sont les facettes de dimension minima. Toute autre facette engendre un sous-espace somme de deux sous-espaces engendrés respectivement par une facette dans P et une facette dans P'.

Pour que P_1 soit réduit à un sommet, il faut et il suffit que P soit une pyramide convexe. Ce cas est caractérisé par la propriété : la facette en O de P' n'est pas contenue dans E_0.

2. Nouvelle caractérisation des pyramides convexes dans les espaces vectoriels de dimension finie :

Proposition. — *Si* P *est une pyramide convexe, le cône d'appui en tout point* x *de* P *est fermé.*

En effet ce cône d'appui est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermés.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône convexe* P *soit une pyramide convexe est que le cône d'appui en tout point* x *de* P *soit fermé.*

Démonstration. — Nous pouvons nous ramener au cas où O est point extrémal du cône en considérant le quotient de P par le sous-espace engendré par la facette de O dans P. Supposons le théorème vrai pour les pyramides convexes qui engendrent un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et démontrons qu'il est vrai pour une pyramide convexe qui engendre un sous-espace vectoriel de dimension n. Montrons d'abord que, dans ces conditions, le cône convexe P est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes. Soit $[O, x \rightarrow)$ une demi-droite de P : si ce n'est pas une arête, tout plan qui passe par cette droite coupe P selon un angle de côtés $[O, x_1 \rightarrow)$ et $[O, x_2 \rightarrow)$ et qui contient $[O, x \rightarrow)$ à son intérieur : la facette de $[O, x_1 \rightarrow)$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension inférieure à n et cette facette est un cône convexe dont le cône d'appui en chaque point est fermé; c'est donc une pyramide convexe qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini d'arêtes : ces arêtes sont arêtes de P. Donc $[O, x_1 \rightarrow)$ est une combinaison linéaire positive de ces arêtes : il en est de même pour $[O, x_2 \rightarrow)$ et par suite pour $[O, x \rightarrow)$.

Montrons maintenant que P ne peut avoir qu'un nombre fini d'arêtes. S'il y en avait une infinité, on pourrait en extraire une suite $[O, x_i \rightarrow)$ tendant vers une droite $[O, A_1 \rightarrow)$ qui appartient à P. Le cône d'appui de P autour de $[O, A_1 \rightarrow)$ est aussi un ensemble fermé : on pourra extraire de la suite $[O, x_i \rightarrow)$ une suite infinie $[O, x'_i \rightarrow)$ telle que les demi-plans $[OA_1, x'_i \rightarrow)$ (demi-plan passant par A_1 et x'_i et limité par OA_1) tendent vers le demi-plan $[OA_1, A_2 \rightarrow)$. Dans cette suite il y a une infinité d'arêtes non situées dans le plan OA_1A_2, car les arêtes situées dans ce plan sont des arêtes de l'intersection de P avec ce plan. Ayant déterminé les génératrices :

$$[O, A_1 \rightarrow), \ldots; \quad [O, A_{p-1} \rightarrow), \ldots$$

et une suite $(x_i^{(p-2)})$ extraite de la suite (x_i) telle que :

$$[O, A_1A_2 \ldots A_{p-2}, x_i^{p-2} \rightarrow) \rightarrow [OA_1 \ldots A_{p-2}, A_{p-1} \rightarrow)$$

nous déterminons la demi-droite $[O, A_p \to)$ par la condition qu'il existe une sous-suite $(x_i^{(p-1)})$ de $(x_i^{(p-2)})$ telle que :

$$[OA_1 \dots A_{p-1}, x_i^{p-1} \to) \to [OA_1 \dots A_{p-1}, A_p \to).$$

Par récurrence, nous déterminerons ainsi les génératrices :

$$[O, A_1 \to), \dots, [O, A_n \to);$$

la suite $(x_i^{(n-1)})$ est alors située dans le demi-espace

$$[OA_1 \dots A_{n-1}, A_n \to)$$

Montrons que pour i assez grand le point $x_i^{(n-1)}$ a des coordonnées positives par rapport à la base formée par $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$.

Comme

$$[O, x_i^{(n-1)} \to) \to [O, A_1 \to)$$

pour i assez grand la première coordonnée de $x_i^{(n-1)}$ est positive.

Comme $[OA_1 \dots A_p, x_i^{(n-1)} \to) \to [OA_1 \dots A_p, A_{p+1} \to)$ la trace de $[OA_1 \dots A_p, x_i^{(n-1)} \to)$ sur le sous-espace $(OA_{p+1}, \dots, A_n)$ est une demi-droite $[O, y_i \to)$ qui tend vers $[O, A_{p+1} \to)$; la $(p+1)$-ième coordonnée de $x_i^{(n-1)}$ est égale à la $(p+1)$-ième coordonnée de y_i qui est positive pour i assez grand. Il en résulte que $[O, x_i \to)$ ne peut pas être une arête.

Remarquons que la condition du théorème est équivalente à la suivante : un cône convexe fermé P est une pyramide convexe si et seulement si l'enveloppe convexe de P avec toute génératrice est fermée. D'après les résultats du premier chapitre, il en résulte que l'enveloppe convexe de P avec toute droite est fermée : *Si l'adhérencc de la trace d'un cône convexe* P *sur tout plan est un angle saillant et si l'enveloppe convexe de* P *avec toute droite est fermée*, P *est une pyramide convexe.*

Si P est une pyramide convexe, son cône d'appui autour de tout sous-espace vectoriel L est la somme directe du cône d'appui de P autour du sous-espace engendré par la trace de P sur L qui est fermé et d'un sous-espace d'appui strict de dimension finie; donc le cône d'appui de P autour de L est fermé. Inversement :

Corollaire 1. — *Un cône convexe fermé tel que le cône d'appui autour de tout sous-espace de codimension 2 soit fermé est une pyramide convexe.*

DÉMONSTRATION. — Si P n'est pas une pyramide convexe, il existe une droite D telle que l'enveloppe convexe de $P \cup D$ ne soit pas fermée. Ceci revient à dire que l'on peut trouver une demi-droite D' telle que le demi-plan Π limité par D et contenant D' ne contienne aucun point de P autre que ceux situés sur D. Si D est intérieure ou extérieure à P, il est évident que cette situation ne peut pas se présenter. Le cas à étudier est celui où D est sur la frontière de P. Alors, aucun point de la trace de P sur Π ne peut être intérieur à P et, P étant facette d'un de ses points il passe par le plan Π un hyperplan d'appui H de P. La trace P_1 de P sur H est un cône convexe fermé dont D est droite frontière; il passe par D un hyperplan d'appui H_1 de P_1, qui ne contient pas D' et l'enveloppe convexe de $H_1 \cup P$ n'est pas fermée puisque H est adhérent à cet ensemble sans lui appartenir, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Une autre démonstration de ce théorème a été donnée par Mirkil [6]. Par suite : *un cône convexe fermé* P *est une pyramide convexe si et seulement si toutes ses projections planes sont fermées.*

3. Pyramides convexes de dimension infinie; définitions; exemples.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps des réels, $\mathcal{T}$ sa topologie.

DÉFINITION. — Une *$\mathcal{T}$-pyramide convexe* est un cône convexe tel que le cône d'appui en tout point x de P soit fermé. Un *$\mathcal{T}$-polyèdre convexe* est la trace d'une $\mathcal{T}$-pyramide convexe sur un hyperplan affine fermé.

L'enveloppe convexe d'une $\mathcal{T}$-pyramide convexe P avec toute droite est fermée et le cône d'appui de P autour de tout sous-espace engendré par une facette est fermé; il en résulte que *le cône d'appui de* P *autour de tout sous-espace de dimension finie est fermé* (en appliquant 1-2).

Nous supposerons que les pyramides convexes considérées ont le point O pour sommet; alors toute intersection finie de $\mathcal{T}$-pyramides convexes est une $\mathcal{T}$-pyramide convexe.

Toute $\mathcal{T}$-pyramide convexe est une $\mathcal{T}'$-pyramide convexe pour une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que $\mathcal{T}'$ et telle que E muni de $\mathcal{T}'$ soit encore un espace vectoriel topologique localement convexe. Si nous munissons E de la topologie fine nous obtenons la

plus grande classe de $\mathcal{C}$-pyramides convexes. Une *pyramide convexe* est une pyramide convexe pour la topologie fine de E (même si l'on considère parallèlement une autre topologie sur E). De même on a les *polyèdres convexes.*

Supposons désormais E muni de la topologie fine; la trace d'une pyramide convexe P sur un sous-espace L quelconque de E est une pyramide convexe dans L car le cône d'appui en un point x de la trace de P sur L est la trace sur L du cône d'appui de P en x. Inversement :

Proposition. — *Si l'espace vectoriel* E *a une base dénombrable, une pyramide convexe est un cône convexe dont la trace sur tout sous-espace de dimension finie est une pyramide convexe dans ce sous-espace.*

Remarquons qu'en général la projection d'une pyramide convexe sur un sous-espace vectoriel n'est pas une pyramide convexe.

Nous allons donner quelques exemples de pyramides convexes qui nous permettront de voir les différences entre les pyramides convexes dans les espaces vectoriels de dimension finie ou infinie.

1) Définition. — Une *pyramide simpliciale* S d'un espace vectoriel E est l'enveloppe convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base algébrique de E.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E; la pyramide simpliciale S est l'ensemble des points x de E dont toutes les coordonnées x_i sont positives ou nulles. S est l'enveloppe convexe de ses arêtes qui sont les demi-droites $[O, e_i \rightarrow)$. Les formes linéaires ω_i telles que :

$$\langle \omega_i, e_i\rangle = 1, \qquad \langle \omega_i, e_j\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \neq j, \qquad i \quad \text{et} \quad j \in \mathrm{I}$$

sont les formes d'appui extrême de S et S est l'intersection de ses appuis extrêmes. L'ensemble des formes ω_i est un ensemble incompatible et irréductible et $(e_i)_{i\in I}$ est la pseudo-base associée. La trace de S sur une variété d'appui V est une pyramide simpliciale dans V; la projection de S sur un sous-espace V′ parallèlement à un sous-espace d'appui extrême est une pyramide simpliciale de V′. Le cône d'appui en un point x de S de coordonnées x_i différentes de O pour tout i

dans l'ensemble d'indices J fini est l'ensemble des points y tels qu'il existe $\lambda \neq 0$ pour lequel :

$$x + \lambda(y - x) \in S$$

ou encore $\quad x_i + \lambda(y_i - x_i) \geqslant 0 \quad$ pour tout $\quad i \in I$.

Si $i \in \complement J$, cette inégalité se réduit à $\lambda y_i \geqslant 0$. Donc on devra avoir $y_i \geqslant 0$, avec $\lambda \geqslant 0$, pour tout $i \in \complement J$. Les inégalités obtenues pour $i \in J$ sont en nombre fini; il existe toujours une solution λ et le cône d'appui de S en x est l'ensemble des points y tels que $y_i \geqslant 0$ pour tout i pour lequel $x_i = 0$ et ce cône d'appui est fermé : S est une pyramide convexe.

La facette du point x dans S est la facette de x dans le cône d'appui de S en x; c'est l'ensemble des points y tels que $y_i = 0$ pour tout indice i tel que $x_i = 0$. La facette de tout point engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie; S n'a point intérieur.

Le cône d'appui autour d'un sous-espace d'appui extrême L est fermé car c'est le cône d'appui en x de la pyramide simpliciale image de S par l'application canonique de E sur l'espace quotient de E par L. Le cône d'appui autour de tout sous-espace n'est pas fermé; en effet, on obtient une nouvelle base de E en conservant un des vecteurs e_0 et en remplaçant e_i par une combinaison linéaire à coefficients positifs de e_i et d'un vecteur ε_i, où $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs situés dans un plan fixe H passant par e_0 et qui converge vers un vecteur d n'appartenant pas à S. Le cône d'appui de la pyramide simpliciale S autour d'un sous-espace supplémentaire à H n'est pas fermé.

Le dual de E est isomorphe à l'espace R^I des familles de puissance I. Le polaire de S n'est pas une pyramide convexe puisque c'est l'ensemble des familles dont tous les termes sont positifs ou nuls, l'ensemble des termes positifs pouvant être infini, et que sa trace sur un sous-espace de dimension finie n'est pas pyramide convexe; le polaire de S n'est pas non plus l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes qui sont les demi-droites $[0, \omega_i \rightarrow)$.

S possède des hyperplans d'appui strict; un tel hyperplan est défini par une forme h qui prend des valeurs strictement positives sur tous les vecteurs de la base.

2) L'exemple précédent peut être généralisé :

Définition. — Une *pyramide simpliciale généralisée* dans un espace vectoriel E est le polaire d'un ensemble irréductible et incompatible de formes $(\omega_i)_{i\in I}$ dans le cas où le cône d'appui en un point x tel que $\langle \omega_i, x\rangle = 0$ pour tout $i \in J$ est l'ensemble des points y tels que $\langle \omega_i, y\rangle \geqslant 0$ pour tout $i \in J$.

Les pyramides simpliciales généralisées ont été étudiées dans [1]. Rappelons qu'une telle pyramide possède des arêtes qui sont les vecteurs de la pseudo-base associée à $(\omega_i)_{i\in I}$. Ces arêtes engendrent une pyramide simpliciale S′ strictement contenue dans S si S n'est pas une pyramide simpliciale. Le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême est fermé mais il existe des sous-espaces autour desquels le cône d'appui de S n'est pas fermé. Si I n'est pas dénombrable, la pyramide simpliciale généralisée ne possède pas d'hyperplan d'appui strict.

La trace d'une pyramide simpliciale généralisée sur un hyperplan, dont la trace sur le sous-espace E′ engendré par les arêtes de S est un hyperplan d'appui strict de S′, est une *pyramide convexe sans arêtes.*

3) Donnons un exemple de pyramide convexe qui ne possède pas d'hyperplan d'appui extrême.

Soit E un espace vectoriel ayant une base dénombrable $(e_0, e'_0, e_1, \dots, e_n)$. Soit (ε_i) une suite de vecteurs ne contenant ni e_0 ni e'_0, telle que chaque ε_i soit combinaison linéaire positive de e_0 et de e'_0 et que e_0 et e'_0 soient adhérents à l'ensemble des ε_i. Posons :

$$e'_i = e_i + \lambda_i \varepsilon_i \qquad \lambda_i > 0$$

Les vecteurs $((e'_i)_{i\in N}, e_0, e'_0)$ forment une base de E. Soit P le cône convexe engendré par les vecteurs (e_i, e'_i) où $i \in N$. Soit E_p un sous-espace de dimension finie, E'_p le plus petit sous-espac contenant E_p engendré par les vecteurs $(e_i, e_0, e'_0)_{i\in N}$; E''_p est aussi engendré par les vecteurs $(e_i, e_0, e'_0)_{i\in N}$. La trace de P sur E'_p est l'enveloppe convexe des vecteurs (e_i, e'_i) qui appartiennent à E'_p, donc c'est une pyramide convexe et le cône convexe P dont la trace sur tout sous-espace vectoriel de dimension finie est une pyramide convexe est lui-même une pyramide convexe. Soit H le sous-espace engendré par les

vecteurs e_i. Le demi-hyperplan limité par H et contenant e_0 n'appartient pas au cône d'appui de P autour de H puisqu'il ne contient aucune génératrice de P, mais ce demi-hyperplan est limite des demi-hyperplans passant par H et contenant e'_i ; le cône d'appui de P autour d'un sous-espace d'appui extrême n'est pas fermé. S'il existait un hyperplan d'appui de P passant par H, sa trace sur le plan passant par e_0 et e'_0 serait un appui de la projection P_1 de P sur ce plan parallèlement à H, et contiendrait e_0 ou e'_0. Or la trace de P sur l'hyperplan H_1 engendré par H et e_0 n'engendre pas cet hyperplan.

Nous pouvons résumer les résultats précédents :

Théorème. — *Une pyramide convexe dans un espace vectoriel de dimension infinie n'a pas toujours des arêtes ni des appuis extrêmes. Son polaire peut n'être ni une pyramide convexe ni l'enveloppe convexe de ses arêtes. Une pyramide convexe peut ne pas posséder d'hyperplan d'appui strict.*

4. Étude des pyramides convexes.

Proposition. — *Si la facette de tout point x d'une pyramide convexe* P *engendre un sous-espace de dimension finie, la pyramide est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Démonstration. — La facette de tout point x de P est une pyramide convexe, enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes, qui sont aussi arêtes de P car leur facette est contenue dans la facette de x.

Corollaire. — *Si une pyramide convexe* P *est contenue dans une pyramide simpliciale, la facette de tout point engendre un sous-espace de dimension finie et la pyramide convexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

En effet la facette de tout point de P est contenue dans la facette de ce point dans la pyramide simpliciale et cette facette engendre un sous-espace de dimension finie. Il en résulte que *l'intérieur de* P *est vide.*

Remarque. — Soit E un espace vectoriel ayant une base dénombrale, $(E_n)_{n\in N}$ une suite de sous-espaces de dimension croissante telle que E soit réunion de cette suite. E_n est un

sous-espace de dimension n. Soit P le cône convexe de E réunion des pyramides convexes P_n telles que P_n engendre E_n et contient à son intérieur une demi-droite D et P_{n+1} est la pyramide convexe de E_{n+1} enveloppe convexe de P_n et de deux demi-droites D_n et D'_n, où D_n et D'_n n'appartiennent pas à E_n et déterminent un angle saillant auquel D est intérieure. P *est une pyramide convexe enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes* qui sont les demi-droites D_n et D'_n où n varie dans N, *et* D *est intérieure à* P.

Proposition. — *Dans une pyramide convexe* P, *une suite infinie d'arêtes ne converge pas.*

Démonstration. — Soit D_n une suite d'arêtes; supposons que cette suite converge, c'est-à-dire que tout voisinage d'une certaine demi-droite D contienne une des arêtes D_n. Si H est un hyperplan affine supplémentaire à D et $(V_i)_{i \in I}$ un système fondamental de voisinages dans H de la trace d de D sur H, les cônes de sommet O qui s'appuient sur les V_i forment un système fondamental de voisinages de D dans E; tout voisinage V_i de d contient au moins la trace d_n sur H d'une arête D_n et, dans H, les d_n forment une suite qui converge vers d pour la topologie fine; une telle suite est contenue dans un sous-espace vectoriel h de dimension finie de H. Les arêtes D_n sont contenues dans le sous-espace vectoriel de E engendré par h; ces arêtes sont arêtes de la pyramide convexe trace sur h de la pyramide convexe P; cette trace ne peut avoir qu'un ensemble fini d'arêtes; toute suite convergente d'arêtes dans une pyramide convexe est finie.

Théorème. — *Par tout sous-espace d'appui extrême* M *d'une pyramide convexe* P *passe un sous-espace d'appui extrême de dimension infinie. Toute facette est contenue dans une facette plus grande.*

Démonstration. — Soit D une droite qui n'appartient pas à M; nous avons vu (I) que dans l'ensemble des sous-espaces d'appui extrême passant par M et ne contenant pas D il existe un élément maximal M′. Si M′ était un sous-espace d'appui extrême de dimension finie, M′ serait le sous-espace engendré par la facette dans P d'un point x de la trace de P sur M′, puisque cette trace est un ensemble convexe dans un espace

de dimension finie, et la projection P' de P sur un sous-espace supplémentaire à M' serait un cône convexe fermé dont O est point extrémal. La trace de P' sur un plan passant par D est un angle saillant fermé; soit D' une droite d'appui extrême de cet angle différente de D et M'' sa facette dans P'; le sous-espace N engendré par M' et M'' est un sous-espace d'appui extrême de P qui contient M' et non D; un sous-espace d'appui extrême maximal est de dimension infinie.

Remarquons que, dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie, ce théorème prouve que tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un hyperplan d'appui extrême. Partant de ce résultat et du fait que la pyramide convexe est alors l'intersection de ses appuis extrêmes (voir I), on peut redémontrer qu'une pyramide convexe de dimension finie est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.

Proposition. — *Si une pyramide convexe est l'intersection de ses appuis extrêmes, son polaire est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes pour la topologie* $\sigma(E^*, E)$ *si la pyramide engendre* E.

Démonstration. — Soit Π l'ensemble des formes d'appui extrême de P; nous avons vu (1,3) que toute forme d'appui extrême de P est sur une arête du polaire de P. Le polaire de Π dans E est la pyramide convexe P; son bipolaire est l'enveloppe fermée convexe de Π pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ (voir I) et $\Pi^{00} = P^0$.

Définition. — Une *pyramide propre* est une pyramide convexe telle que le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême soit fermé.

Cette définition est équivalente à la suivante : une pyramide propre est un cône convexe fermé tel que le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême soit fermé.

Toute pyramide convexe dans un espace de dimension finie est une pyramide propre. Une pyramide simpliciale et une pyramide simpliciale généralisée sont des pyramides propres.

Proposition. — *La trace* P' *d'une pyramide propre* P *sur un sous-espace* E' *est une pyramide propre*; *la projection* P'' *sur un sous-espace* E'' *parallèlement à un sous-espace* L'' *d'appui extrême de* P *est une pyramide propre.*

DÉMONSTRATION. — Tout sous-espace d'appui extrême L' de P' est la trace sur E' d'un sous-espace d'appui extrême L' de P engendré par la facette de L' dans P; le cône d'appui de P' autour de L' est la trace sur E' du cône d'appui de P autour de L'; il est fermé. De même si M est un sous-espace d'appui extrême de P'', alors M est la trace sur E'' d'un sous-espace d'appui extrême de P et le cône d'appui de P'' autour de L'' est encore fermé.

PROPOSITION. — *Le cône d'appui d'une pyramide propre* P *autour de tout sous-espace d'appui* L *sur lequel la trace* P' *de* P *engendre un sous-espace* L' *de codimension finie dans* E, *est fermé.*

En effet la projection de P sur un sous-espace E' parallèlement à L' est une pyramide de dimension finie dont le cône d'appui autour de la trace de L sur E' est fermé.

THÉORÈME. — *Toute pyramide propre qui engendre l'espace vectoriel* E *est l'intersection de ses appuis extrêmes.*

DÉMONSTRATION. — On peut supposer que O est point extrémal de P; sinon il suffira de prendre le quotient de P par le sommet généralisé de P, qui sera encore une pyramide propre. Soit L un sous-espace d'appui extrême de P et D une droite non contenue dans L. Dans l'ensemble des sous-espaces d'appui extrême de P qui passent par L et qui ne contiennent pas D, il y a un élément maximal L'. Si L' n'est pas un hyperplan, soit P'' la projection de P sur un sous-espace qui contient D parallèlement à L'. Alors P'' est une pyramide propre dont O est point extrémal; la trace de P'' sur un plan passant par D est un angle saillant *fermé*; une droite d'appui extrême de cet angle au moins est différente de D; soit D' cette droite d'appui, L'' sa facette dans P''; le sous-espace engendré par L' et L'' est un sous-espace d'appui extrême de P qui ne contient pas D; ceci est impossible si L' est maximal, donc L' est un hyperplan et *tout sous-espace d'appui extrême de* P *qui ne contient pas une droite* D *peut être plongé dans un hyperplan d'appui extrême qui ne contient pas* D. Soit F l'ensemble des formes d'appui extrême de P; le polaire de F contient P; inversement soit x un point du polaire de F dans E; il y a un sous-espace de dimension finie E_i qui contient x et la trace

P_i de P sur E_i est une pyramide convexe; tout hyperplan d'appui extrême de P_i est trace sur E_i d'un hyperplan d'appui extrême de P et x appartient à P_i donc à P.

Remarque. — L'exemple de la pyramide simpliciale généralisée montre que P peut être intersection d'un sous-ensemble de l'ensemble de ses appuis extrêmes.

Proposition. — *Tout sous-espace d'appui extrême d'une pyramide propre est l'intersection des hyperplans d'appui extrêmes qui le contiennent.*

Démonstration. — Soit L un sous-espace d'appui extrême de la pyramide propre P et $(H_i)_{i \in I}$ la famille des hyperplans d'appui extrême qui contiennent L. Alors soit D une droite qui appartient à l'intersection $\mathcal{H}$ de cette famille et non à L; l'ensemble des sous-espaces d'appui extrême de P qui contiennent L et non D possède un élément maximal; la démonstration précédente prouve que cet élément maximal est un hyperplan, donc D n'appartient pas à $\mathcal{H}$.

Corollaire 1. — *Toute arête du polaire d'une pyramide propre* P *est engendrée par une forme d'appui extrême de* P; *si* P^0 *est facette d'un de ses points* g, *alors* g *est une forme d'appui strict.*

Démonstration. — Si f est sur une arête de P^0, toute forme qui s'annule sur le sous-espace K engendré par la trace de P sur l'hyperplan F sur lequel s'annule f est proportionnelle à f; comme K est l'intersection des hyperplans d'appui extrême qui le contiennent, F est hyperplan d'appui extrême de P. Si P^0 est facette de g, toutes les formes d'appui de P s'annulent sur le sous-espace K' engendré par la trace de P sur l'hyperplan G sur lequel s'annule g, donc K' est le sommet généralisé de P.

Corollaire 2. — *Le cône d'appui d'une pyramide propre* P *autour d'un sous-espace d'appui extrême* L *est l'intersection des appuis extrêmes qui sont limités par un hyperplan d'appui extrême contenant* L.

En effet la projection P' de P sur un sous-espace E' parallèlement à L est une pyramide propre intersection de ses appuis

extrêmes; les hyperplans d'appui extrême de P' sont trace sur E' des hyperplans d'appui extrême de P qui contiennent L.

Corollaire 3. — *L'enveloppe convexe* Π *de l'ensemble des arêtes du polaire d'une pyramide propre est une pyramide convexe.*

Démonstration. — P est le polaire de Π si E^* est muni de la topologie $\sigma(E^*, E)$. Soit $f \in \Pi$, F l'hyperplan sur lequel s'annule f et P' la trace de P sur F. Montrons que *le cône d'appui de* Π *en* f *est l'ensemble des formes* g *qui s'annulent sur un hyperplan* G *dont la trace sur le sous-espace engendré par* P' *est un hyperplan d'appui de* P'; ainsi ce cône d'appui est le polaire de P' et il est fermé pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ donc pour la topologie fine sur E^*.

Lemme. — Π *est l'ensemble des formes* f *telles que* F *contienne un sous-espace d'appui extrême de codimension finie.*

En effet, si $f \in \Pi$, f est combinaison linéaire finie de formes h_i d'appui extrême et F contient le sous-espace intersection des hyperplans d'appui extrême H_i correspondants. Inversement, si F contient le sous-espace d'appui extrême F' de codimension finie, F' est l'intersection d'un ensemble fini d'hyperplans H_i; la projection de P parallèlement à F' est une pyramide convexe de dimension finie et la trace de F est un hyperplan d'appui; la restriction de f au sous-espace engendré par cette pyramide convexe de dimension finie est combinaison linéaire des restrictions des formes h_i qui sont des formes d'appui extrême.

Si g appartient au cône d'appui de P^0 en f, alors $\langle g, x\rangle = 0$ si $\langle f, x\rangle = 0$ avec $x \in P$. Inversement, si g a la propriété énoncée, et si G est l'hyperplan sur lequel s'annule g, la projection de P sur un plan parallèlement à $F \cap G$ est un angle fermé dont O est point extrémal et qui a pour droite d'appui la trace de F; la trace de G est une droite quelconque. Cet angle a une autre droite d'appui D'. Une forme qui s'annule sur l'hyperplan engendré par D' et $F \cap G$ est une forme d'appui de P qui appartient au segment $[f, g]$.

Définition. — Une *pyramide stricte* est une pyramide convexe telle que le cône d'appui autour de *tout* sous-espace soit fermé.

Par exemple toute pyramide dans un espace de dimension finie est une pyramide stricte. L'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces est une pyramide stricte, qui est somme directe d'un sous-espace quelconque et d'une pyramide convexe qui engendre un sous-espace de dimension finie.

Une pyramide stricte est une pyramide propre; tout sous-espace d'appui est l'intersection des hyperplans d'appui qui le contiennent; une pyramide stricte possède un hyperplan d'appui strict [1] donc son polaire est facette d'un de ses points.

Proposition. — *Le polaire d'une pyramide stricte est une pyramide convexe.*

Soit f une forme d'appui de P; le *cône d'appui de* P^0 *en* f *est le polaire de la trace* P′ *de* P *sur l'hyperplan* F *sur lequel s'annule* f. En effet, si g appartient au cône d'appui de P^0 en f, alors g s'annule sur P′ ou y prend des valeurs positives. Inversement, si G est l'hyperplan sur lequel s'annule g, le cône d'appui de P autour de $F \cap G$ a pour trace sur un plan un angle fermé dont O est point extrémal et dont la trace de F est un appui; cet angle a une autre droite d'appui D′ et l'hyperplan engendré par D′ et $F \cap G$ est un hyperplan d'appui H′ de P; une forme h' qui s'annule sur H′ est une forme d'appui de P qui appartient au segment $[f, g]$.

Conjecture. — *Toute pyramide stricte est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.*

5. Polyèdres convexes:

Proposition. — *Soit* E *un espace vectoriel; un polyèdre convexe est un ensemble convexe fermé pour la topologie fine tel que le cône d'appui en chaque point de cet ensemble soit fermé pour la topologie fine.*

Plongeons l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E_1 somme directe de E et d'un espace à une dimension de sorte que E soit l'hyperplan affine de E_1 ensemble des points x tels que $\langle \omega_0, x \rangle = 1$; E_1 est muni de la topologie fine. Soit E_0 l'hyperplan de E sur lequel s'annule la forme ω_0; on peut compléter E en lui ajoutant les points *impropres* (comme dans le cas de dimension finie II,1) qui correspondent d'une manière biunivoque aux demi-droites d'origine 0 contenues dans E_1; soit

φ l'application biunivoque de E dans l'ensemble des points impropres de E. Le polyèdre convexe C est complété en $\overline{C}$. Dans E_1, le cône convexe de sommet O qui s'appuie sur C est une pyramide convexe. On définit une application biunivoque de P sur $\overline{C}$: l'image par cette application d'une génératrice de P non située dans E_1 est la trace de cette génératrice sur E, qui est un point propre de $\overline{C}$; l'image d'une génératrice D de P située dans E_0 est le point impropre de $\overline{C}$ image par φ de D. *Si le polyèdre convexe* C *n'est pas pseudo-borné*, P *admet un sous-espace d'appui extrême situé dans* E_0. *Si* C *est pseudo-borné*, E_0 *est hyperplan d'appui strict de* P.

Un *simplexe* de E est la trace d'une pyramide simpliciale S de E sur un hyperplan affine parallèle à un hyperplan d'appui strict de S; *un simplexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes et toute facette engendre un sous-espace de dimension finie;* ces deux propriétés sont encore vraies pour tout polyèdre convexe contenu dans un simplexe. Dans un polyèdre convexe pseudo-borné, toute suite convergente de points extrémaux est finie.

Un *polyèdre propre* est un polyèdre convexe tel que le cône d'appui autour de toute variété d'appui extrême soit fermé; c'est l'intersection de ses appuis extrêmes; toute variété d'appui extrême est l'intersection des hyperplans d'appui extrême affines qui la contiennent.

Un *polyèdre strict* est un polyèdre convexe tel que le cône d'appui autour de toute variété soit fermé.

Proposition. — *L'image d'un polyèdre strict par une application affine est fermée. Toute forme linéaire définie sur un polyèdre strict prend des valeurs infinies ou atteint son extremum sur une variété d'appui.*

Démonstration. — Soient f une application affine de l'espace vectoriel E qui contient le polyèdre convexe C dans un espace vectoriel F, P la pyramide convexe de E_1 engendrée par C. L'application f se prolonge d'une manière unique en une application $\bar{f}$ de E_1 dans l'espace vectoriel F_1 somme directe de F et d'un espace à une dimension Re'_0; le noyau de $\bar{f}$ est le sous-espace vectoriel de E_1 translaté du noyau de f dans E.

L'image de P par $\bar{f}$ peut s'identifier à la projection de P sur un sous-espace vectoriel supplémentaire au noyau de $\bar{f}$. Cette projection est fermée puisque P est une pyramide stricte; l'image de C par f, trace sur F de l'image de P par $\bar{f}$ est donc fermée. Si F est la droite réelle, l'image de C est un segment fermé si f est toujours finie. Soit x un point de C où f atteint son extremum; l'image réciproque par f de cet extremum contient tout segment dont x est point intérieur; c'est une variété d'appui de C.

Conjecture. — *Tout polyèdre strict pseudo-borné est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

III. PYRAMIDES TOPOLOGIQUES. APPLICATIONS.

1. Définitions :

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps des réels, $\mathfrak{T}$ sa topologie.

Définition. — Une *pyramide topologique* est l'adhérence (pour $\mathfrak{T}$) d'une pyramide convexe. Un *polyèdre topologique* est l'adhérence d'un polyèdre convexe.

Toute pyramide convexe est une pyramide topologique pour la topologie fine et réciproquement. Toute pyramide de dimension finie est une pyramide topologique. Toute $\mathfrak{T}$-pyramide convexe est une pyramide topologique de E, mais le réciproque est fausse.

Une pyramide simpliciale généralisée (II. 3) est une pyramide topologique de E pour la Ω-topologie sur E, si Ω est l'ensemble incompatible et irréductible associé à S; pour cette topologie, *la pyramide simpliciale généralisée est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.* Pour des topologies plus fines, ceci n'est plus vrai.

Le polaire d'une pyramide propre qui engendre un espace vectoriel F *est une pyramide topologique pour la topologie* σ (F*, F), adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes. (II, 4); une pyramide topologique de ce type peut ne pas être une pyramide convexe comme le montre l'exemple

d'une pyramide simpliciale. Le *polaire d'une pyramide stricte est une pyramide topologique et une pyramide convexe* (II, 4). Le polaire d'un cône convexe peut être une pyramide topologique même si le cône C n'est pas une pyramide convexe : si R_b^I est l'espace des fonctions bornées définies sur l'ensemble I, muni de la topologie fine, le cône C ensemble des fonctions bornées positives n'est pas une pyramide convexe [1], mais son polaire est la pyramide topologique enveloppe fermée convexe pour la topologie $\sigma((R_b^I)^*, R_b^I)$ de l'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ où ω_i est l'application de R_b^I dans R qui à $(x_i)_{i \in I}$ fait correspondre x_i (en effet l'enveloppe convexe de l'ensemble incompatible $(\omega_i)_{i \in I}$ est une pyramide convexe).

Soit P une pyramide propre dans un espace vectoriel F; supposons que O soit point extrémal de P; si on munit E de la Ω-topologie où Ω est l'ensemble des formes d'appui extrême de P, alors P est fermée. *Pour toute topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la Ω-topologie une pyramide propre est une pyramide topologique et une $\mathcal{T}$-pyramide propre* (car le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême est l'intersection des appuis extrêmes qui contiennent le sous-espace d'appui extrême et il est fermé pour la Ω-topologie. Si on munit E d'une topologie $\mathcal{T}'$ pour laquelle l'intérieur de P n'est pas vide, alors toute forme d'appui extrême de P est continue pour $\mathcal{T}'$ car le demi-espace ouvert qui contient l'intérieur de P pour la topologie fine contient l'intérieur de P pour $\mathcal{T}'$ et est limité par un hyperplan d'appui extrême qui ne peut donc pas être partout dense dans E pour $\mathcal{T}'$. *Une pyramide propre est une pyramide topologique pour toute topologie pour laquelle son intérieur n'est pas vide.*

Une pyramide topologique peut être l'adhérence de plusieurs pyramides convexes : par exemple si S est une pyramide simpliciale généralisée d'un espace vectoriel E, dont l'ensemble des arêtes engendre un sous-espace de codimension 1, le polaire de S est l'adhérence de l'enveloppe convexe de toutes ses arêtes, et aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe des arêtes $[O, \omega_i \rightarrow)$ où $(\omega_i)_{i \in I}$ est l'ensemble incompatible et irréductible auquel l'ensemble des arêtes de S est associé : remarquons que toute forme d'appui extrême f qui n'est pas une des formes ω_i est limite d'une famille de ces formes pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.

2. Pyramides simpliciales topologiques.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une pseudo-base topologique d'un espace vectoriel topologique E, associée à l'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ du dual topologique E′ de E ; la trace du cône convexe S, polaire de $(\omega_i)_{i \in I}$ dans E, sur le sous-espace vectoriel Π engendré par $(e_i)_{i \in I}$ contient la pyramide simpliciale S′, enveloppe convexe de l'ensemble $(e_i)_{i \in I}$; S est l'adhérence de S′ pour la $(e_i)_{i \in I}$-topologie sur E ; l'adhérence de S′ pour la topologie donnée peut être strictement contenue dans S. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base topologique de E, alors S est l'adhérence de S′ pour la topologie donnée.

Définition. — Une *pyramide simpliciale topologique* d'un espace vectoriel topologique E est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base topologique de E.

Une pyramide simpliciale topologique est l'adhérence d'une pyramide simpliciale qui engendre un sous-espace vectoriel partout dense dans E, mais l'adhérence d'une pyramide simpliciale qui engendre un sous-espace vectoriel partout dense dans E n'est pas toujours une pyramide simpliciale topologique. Une pyramide simpliciale topologique est le polaire de la pseudo-base topologique associée à la base topologique.

Proposition. — *Si $(\omega_i)_{i \in I}$ est l'ensemble incompatible et irréductible dont le polaire est la pyramide simpliciale topologique* S, *et Ω_i l'hyperplan sur lequel s'annule ω_i, l'adhérence de la facette de tout point x de* S *est l'intersection des hyperplans Ω_i qui contiennent x;* S *est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes qui sont engendrées par les vecteurs e_i de la base topologique; l'adhérence d'un sous-espace d'appui extrême* L *est l'intersection des hyperplans Ω_i qui contiennent* L.

Démonstration. — Si S′ est la trace de S sur le sous-espace Π engendré par les vecteurs e_i, la facette dans S d'un point x de S′ est la facette de ce point dans S′ ; la facette d'un tel point engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie et les arêtes de S′ sont arêtes de S. Si x n'appartient pas à S′, sa facette est contenue dans le sous-espace Ω_J intersection des hyperplans $(\Omega_j)_{j \in J}$ qui passent par x; tout vecteur e_k où $k \notin J$ appartient à la facette de x dans S car si y est le point de S de

coordonnées $\frac{x_i}{t}$, $\frac{x_k + t - 1}{t}$ où $1 > t > 1 - x_k$, alors x est intérieur au segment $[y, e_k]$; Ω_J, qui est l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_k où $k \notin J$ (d'après les propriétés d'une base topologique) est l'adhérence du sous-espace engendré par la facette de x dans S, qui engendre ainsi un sous-espace vectoriel de dimension infinie. L'adhérence de L contient l'adhérence de la facette de tout point x de $L \cap S$ et c'est l'intersection des hyperplans Ω_i qui contiennent L.

Remarque. — La facette de x n'est pas toujours fermée: si E est l'espace $L^2(N)$ des suites de carré sommable $(x_i)_{i \in N}$ muni de la norme hilbertienne et si $x_i = 0$ pour $i \leqslant p$, un point y tel que $y_i = 0$ pour $i \leqslant p$ et $y_i = \frac{ix_i}{2i - 1}$ pour $i > p$ appartient encore à $L^2(N)$ mais ce point est adhérent à la facette de x et ne lui appartient pas.

Théorème. — *L'intersection d'une pyramide simpliciale topologique avec un sous-espace fermé de codimension finie est une pyramide topologique enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Démonstration. — Utilisons un raisonnement par récurrence. Soit Π le sous-espace vectoriel engendré par les arêtes de la pyramide simpliciale topologique S qui a pour trace sur Π la pyramide simpliciale S'; un hyperplan fermé H de E a pour trace sur Π l'hyperplan H' de Π.

1) Si H n'est pas un hyperplan d'appui de S, soit $[O, e_0 \to)$ une arête de S non située dans H. Si $V(x)$ est un voisinage d'un point x de S dans H, la trace, sur le demi-espace ouvert H^+ limité par H et qui ne contient pas e_0, du cône de sommet e_0 qui s'appuie sur $V(x)$ est un voisinage d'un point de S et contient un point z' de S'. La demi-droite $[e_0, z' \to)$ coupe H en un point x' de $S' \cap H$.

2) Si H n'est pas un hyperplan d'appui de S, la trace sur H de S est la pyramide simpliciale topologique S_1 du sous-espace d'appui extrême fermé de S qu'elle engendre et S_1 est l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes, qui sont des arêtes de S.

Supposons que la trace de S sur tout sous-espace fermé de codimension $(k-1)$ soit l'adhérence de la trace de S′ sur ce sous-espace. Soit H_k un sous-espace fermé de codimension k et H_{k-1} un sous-espace fermé de codimension $(k-1)$ qui le contient. Si H_k n'est pas un hyperplan d'appui de la trace S_{k-1} de S sur H_{k-1}, on est ramené au cas 1). Si H_k est hyperplan d'appui de S_{k-1}, soit H'_k le sous-espace d'appui extrême fermé de S_{k-1} engendré par la trace S_k de S sur H_k; ce sous-espace est la trace sur H_{k-1} d'un sous-espace d'appui extrême fermé H″ de S; la trace S″ de S sur H″ est une pyramide simpliciale topologique et sa trace sur le sous-espace H'_k de codimension $(k-1)$ dans H″ est l'adhérence de la trace de S′ sur ce sous-espace, donc l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes; cette trace est S_k.

Corollaire 1. — *Une pyramide topologique, adhérence d'une pyramide convexe contenue dans le cône convexe engendré par les vecteurs d'une base topologique est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Corollaire 2. — *L'intersection d'une pyramide simpliciale topologique avec un ensemble fini de demi-espaces est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Corollaire 2. — (*Théorème de Rosenbloom généralisé* [7]) *: L'intersection* C *de la pyramide topologique* S *avec un ensemble fini* $(H_i)_{i\leqslant n}$ *d'hyperplans affines fermés contient un point extrémal. Si* C *est pseudo-borné,* C *est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux qui ont n coordonnées au plus sur les vecteurs de la base topologique différentes de* 0.

Démonstration. — Soit K l'intersection des hyperplans H_i; le sous-espace vectoriel K_1 engendré par K et $\{O\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de codimension n, sur lequel la trace Σ de S est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes; le sous-espace engendré par la facette d'une de ses arêtes dans S′ est de dimension n au plus. La trace sur K d'une arête de Σ est un point extrémal de C. Si C est pseudo-borné, toute arête de Σ coupe K et C est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

3. Applications.

Je ne donnerai que des applications immédiates des résultats précédents à l'analyse.

1) Soit E l'espace des fonctions analytiques réelles sur [O, 1] qui ont un prolongement analytique complexe dans la boule ouverte $|z| < 1$; munissons E de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de [O, 1], pour les fonctions et toutes leurs dérivées. L'ensemble des fonctions e_n où $e_n(x) = x^n$ est une base topologique de E car toute fonction f est somme de la famille $\left(\frac{1}{p!} f^{(p)}(0)\, e_p\right)_{p\in N}$. Soit S le cône convexe fermé engendré par les vecteurs e_n; S est une pyramide simpliciale topologique.

Soit g une fonction analytique réelle sur [O, 1] admettant le point 1 comme point singulier ou non, dont toutes les dérivées en O et par suite en tout point de [O, 1] sont positives ou nulles. Alors la fonction g se prolonge analytiquement dans la boule $|z| < 1$ et g appartient à E; une telle fonction est une fonction *absolument monotone* sur [O, 1]. Le cône S est l'ensemble de ces fonctions.

Toute distribution au sens de L. Schwartz à support compact dans [0, 1] induit une forme linéaire canonique sur E. Soit T_i une famille de telles distributions. L'ensemble des fonctions absolument monotones f telles que $T_i(f) \leqslant c_i$ où c_i est une constante, est un polyèdre topologique; s'il est pseudo-borné, il est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux qui correspondent aux polynômes réels à coefficients positifs. Une forme linéaire qui atteint son extremum sur un tel polyèdre topologique l'atteint en un point extrémal.

Exemple. — Cherchons s'il existe une fonction analytique absolument monotone f qui prend en deux points a et b des valeurs a' et b' et qui a une valeur minima en un point c. Supposons $a = 0$, $a' = 0$, $b' > 0$. Si f existe, f sera un point extrémal du polyèdre P intersection de S avec l'ensemble des fonctions de E qui prennent la valeur O en 0 et la valeur b' en b. Ce polyèdre topologique coupe l'arête $[0, e_n \rightarrow)$ au point $g = \frac{b'}{b^n} e_n$. Ainsi $f = \frac{b'}{b}$ si $c > b$ et f n'existe pas si $b > c$.

De même si on cherche en quel point de ce polyèdre topolo-

gique P on aura un extremum pour $\int_0^1 f(x)\,dx$, il faudra que $\dfrac{b'}{b^n(n+1)}$ soit extremum, c'est-à-dire que $n = -\dfrac{1}{\mathrm{L}\,b} - 1$. Il en résulte : le *minimum n'est jamais atteint*; *si* $b > \dfrac{1}{e}$, *le maximum est atteint pour la fonction* f *telle que* $f(x) = \dfrac{b'}{b}x$; si $b > 1/e$, *le maximum est atteint en une arête au moins de* S (*deux si* $\mathrm{Lb} = -\dfrac{2}{2k+3}$).

2) Soit G un groupe compact abélien, $L^2(G)$ l'espace de Hilbert formé des fonctions à valeur complexes mesurables et de carré sommable, muni du produit scalaire : $(f|g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$. L'ensemble $\hat{G}$ des caractères (α_n) sur G est discret et $\hat{G}$ est une famille orthonormale complète (considérée comme appartenant à $L^2(G)$ [5]) Tout élément f de $L^2(G)$ s'écrit :

$$f = \Sigma \hat{f}(\alpha_n)\alpha_n \qquad \text{avec} \qquad \hat{f}(\alpha_n) = \int f(x)\,\overline{(x|\alpha_n)}\,dx.$$

Le cône S formé des éléments f tels que $\hat{f}(\alpha_n) \geqslant 0$ pour tout $\alpha_n \in \hat{G}$ est une pyramide simpliciale topologique; soit P l'intersection de S avec l'ensemble fini de demi-espaces

$$F_i(f) = \int f(x)\overline{F_i(x)}\,dx \leqslant c_i, \quad \text{où} \quad F_i \in L^2(G) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Alors P est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux, qui sont de la forme : $g = \sum_1^k \hat{g}(\alpha_n)\alpha_n$. Pour les obtenir explicitement nous écrirons :

$$F_i(f) = \sum_1^k \hat{g}(\alpha_n)\int \overline{F_i(x)}\,(x|\alpha_n)\,dx = \sum_1^k \hat{g}(\alpha_n)\widehat{F}_i(\alpha_n) \leqslant c_i$$

ce qui permet de déterminer $\hat{g}(\alpha_n)$ et par suite g. D'où :

Proposition. — *Tout point de* P *est limite d'une suite d'éléments de la forme* $\sum_1^k a_n\hat{F}_i(\alpha_n)$. *En particulier, si* $G = [0, 1]$, *tout élément de* P *est de la forme* $\sum_1^k a_n \int \overline{F_n(x)} e^{2i\pi nx}\,dx$.

On peut ainsi retrouver les résultats de Bernstein.

3) Si G est un groupe abélien localement compact, soit E l'ensemble des éléments de $L^2(G)$ qui sont des fonctions presque périodiques à gauche [5]. Une telle fonction est limite de combinaisons linéaires finies de caractères de G et le raisonnement précédent s'applique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bastiani et C. Ehresmann, Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet, *C.R. Ac. Sc.* 1959, t. 248, p. 2695-2697.

[2] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologique*, Ch. I et II, Hermann, Paris, 1953.

[3] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. III, IV, V, Hermann, Paris, 1955.

[4] G. Choquet, Convergences, *Ann. Un. Grenoble*, t. XXIII, 1948, p. 57-111.

[5] L.H. Loomis, An introduction to abstract Harmonic Analysis, *The Un. Series in Higher Mathematics.*

[6] Mirkil, *Jour. Canadien de Mathématiques*, 1957-1, p. 1-4.

[7] P. Rosenbloom, Quelques classes de problèmes extrémaux, *Bull. Soc. Math. France*, 1951, t. 79, p. 1-58.

A NON-PROBABILISTIC PROOF OF THE RELATIVE FATOU THEOREM

by J. L. DOOB

1. Introduction.

Let R be a Green space, as defined by Brelot and Choquet, with Martin boundary R′. Naïm [4] has extended the Cartan fine topology on R to R ∪ R′. Limits involving this topology will be called « fine limits ».

Let h be a strictly positive superharmonic function. Then h has a canonical integral representation [1], going back to Martin if R is an open subset of a Euclidean space, involving a uniquely determined measure μ^h on R ∪ R′. It has been shown [3] using probabilistic methods that, if u is a positive superharmonic function on R, then u/h has a finite fine limit at μ^h-almost every point of R ∪ R′. The purpose of this note is to prove this theorem non-probabilistically. Note that, if h is harmonic, the theorem is a boundary limit theorem, because then μ^h is a measure of subsets of R′. In particular, if h is a constant function, the theorem states that u has a finite fine limit at μ^h-almost every point of R′. This is the justification for calling the theorem the relative Fatou theorem.

2. Fine limits.

The fine topology, a refinement of the Martin topology, is defined in terms of the concept of « thinness » (« effilement »). A set is a fine neighborhood of a point if it contains the point and if its complement is thin at the point. Let η be a point of R ∪ R′, and let g be a function defined on a set A which is

not thin at η, that is, for which η is a fine limit point. Then the fine superior limit b of g at η is defined as the infimum of the numbers c such that the inequality $g(\xi) > c$ defines a set thin at η. We write

$$\text{(2.1)} \qquad F \limsup_{\xi \to \eta} g(\xi) = b.$$

The fine inferior limit is defined and denoted correspondingly, and is also equal to the infinum of the numbers c such that the inequality $g(\xi) \leqslant c$ defines a set which is not thin at η. The function g is said to have the fine limit b at η if b is both its fine superior and inferior limit. Notions involving limits on R will never involve the fine topology unless « fine » appears explicitly.

If g has the fine limit b at η along $A \subset R$, Naim [4] has shown that there is a subset B of A, thin at η, and such that g has the limit b at η along A — B. More generally, an adaptation of this proof shows that if g has the fine superior and inferior limits b_1 and b_2 respectively at η along $A \subset R$, then there is a subset B of A, thin at η, such that g has the superior and inferior limits b_1 and b_2 respectively at η along A — B. The following related theorem goes slightly deeper.

THEOREM 2.1. — *If g has fine superior limit b at η along $A \subset R$, there is a subset A_0 of A, not thin at η, such that g has limit b at η along A_0.*

The corresponding theorem is of course valid for fine inferior limits. To prove the theorem, we can suppose that b is finite. Let ξ_0 be a point of R, not η if η is in R. Let h be the minimal harmonic function corresponding to η if η is a point of R′. (Naïm showed that the set of minimal boundary points is the set of fine limit points of R on the boundary). If η is a point of R, let h be the Green function with pole η. Let A_{ijk} be the subset of A at distance $< 1/j$ but $\geqslant 1/k$ from η, and satisfying the inequality

$$\text{(2.2)} \qquad b - 1/i \leqslant g(\xi) \leqslant b + 1/i.$$

Then $\bigcup_k A_{ijk}$ is not thin at η, so that the smoothed lower envelope h_{ijk} of the positive superharmonic functions majorizing h on a neighborhood of A_{ijk} is arbitrarily near $h(\xi_0)$ if

k is sufficiently large. Choose $j_1 = 1$. If $j_1, \ldots, j_n$ have been chosen, choose j_{n+1} so large that $h_{nj_nj_{n+1}}(\xi_0) \geqslant h(\xi_0)/2$. Define $A_0 = \bigcup_n A_{nj_nj_{n+1}}$. Then A_0 satisfies the conditions of the theorem.

Naïm proved a theorem [4, Theorem 23], which can be restated in the following more perspicuous form, in view of Theorem 2.1.

THEOREM 2.2. — *Let ξ be a point of* R, ε *a strictly positive number, h a strictly positive harmonic function on* R, *and let f be an extended real valued function on* R$'$. *Let u be a function on* R *with the following properties.*

(a) *u is subharmonic, and u/h is bounded from above.*

(b) *u/h has fine inferior limit $\leq f(\eta)$ at each minimal boundary point η. Then there is a function $u_{\xi\varepsilon}$ on* R, *satisfying* (a), *with*

$$u_{\xi\varepsilon}(\xi) \geq u(\xi) - \varepsilon, \tag{2.3}$$

and having superior limit $\leq f(\eta)$ at each minimal boundary point η.

3. The first boundary value problem.

If h is strictly positive and superharmonic on R, a function u/h with u superharmonic, subharmonic or harmonic will be called h-superharmonic, h-subharmonic or h-harmonic respectively. The remarks in this section presuppose that h is harmonic but can be extended to the general case. Suppose then that h is harmonic and strictly positive. The first boundary value problem for h-harmonic functions on R can be solved using the standard Perron-Wiener-Brelot method. A few details of this method will be needed. If f is the specified boundary function on R$'$, consider the following classes C1, C2, C3 of functions v/h. In each class v is subharmonic or identically $-\infty$, and v/h is bounded from above. The following further condition is to be satisfied in the indicated class.

C1 v/h has limit superior $\leq f(\eta)$ at each point η of R$'$.

C2 The preceding condition need hold only at the minimal boundary points.

C3 v/h has fine limit inferior $\leq f(\eta)$ at each minimal point η of R$'$.

Obviously $C1 \subset C2 \subset C3$. The lower h-solution is defined as the upper enveloppe of the class C1. It is then shown that this upper envelope is the same as that of C2, and Theorem 2.2 shows that this upper envelope is the same as that of C3. The upper h-solution is defined dually, and f is called h-resolutive if these two solutions are identical and h-harmonic. The h-harmonic function thereby obtained is the h-solution corresponding to f.

Brelot [1] has shown that all continuous boundary functions are h-resolutive, and has thereby defined h-harmonic measure of boundary sets, generalizing ordinary harmonic measure. The class of boundary sets of h-harmonic measure 0 is independent of the reference point and is the same as the class of boundary sets of μ^h-measure 0. (We observe, to avoid misunderstanding, that although Brelot calls the « solution » a certain harmonic function u, we call the « solution » the h-harmonic function u/h, to conform to the spirit of the general first boundary value problem).

4. The relative Fatou theorem.

The following theorem was proved by probabilistic methods in [3].

Theorem 4.1. — *If h is strictly positive and harmonic, and if f is an h-resolutive boundary function, corresponding to the solution u/h, u/h has fine limit f μ^h-almost everywhere on* R'.

We prove this theorem using Theorem 2.2. If u/h has fine limit inferior $< f(\eta)$ at the minimal boundary point η, define $f'(\eta)$ as this fine limit inferior; at other boundary points set $f' = f$. If v/h is in the lower class C3 for f, $v \leqslant u$, so v/h is in this same class for f'. Hence, if u'/h is the lower h-solution for f', $u' \geqslant u$. These two functions are identical, since $f' \leqslant f$. The upper h-solution for f' is majorized by u/h, that for f, so that both upper and lower h-solutions for f' are u/h. That is, f and f' are both h-resolutive, with the same solution. According to Brelot [1] this fact implies that $f = f'$ μ^h-almost everywhere on R', that is,

$$\mathrm{F} \liminf_{\xi \to \eta} \frac{u(\xi)}{h(\xi)} \geqslant f(\eta) \tag{4.1}$$

μ^h-almost everywhere on R′. Applying this result to $-f$ and combining the two we obtain Theorem 4.1.

The following theorem is due to Naïm [4].

Theorem 4.2. — *If h is strictly positive and harmonic, and if u is superharmonic and the potential of a measure on* R, *then u/h has the fine limit* 0 *μ^h-almost everywhere on* R′.

Theorem 4.3. — *If h is strictly positive and harmonic, and if u is positive and superharmonic, u/h has a finite fine limit μ^h-almost everywhere on* R′.

In view of Theorem 4.2 and the Riesz decomposition, it is sufficient to consider only the case when u is harmonic. Now if u/h is positive and h-harmonic, it is [4] the sum of an h-solution u_1/h and of a function u_2/h with the property that u_2 is positive and harmonic, with min $[u_2, h]$ the potential of a measure on R. Then u/h has the fine limit f μ^h-almost everywhere on R′, where f is a boundary function with h-solution u_1/h.

The following theorem includes the three preceding ones, aside from the identification of the limit. It was first proved in [3] by probabilistic methods, without using the decompositions necessary in the present treatment.

Theorem 4.4. — *Let u and h be strictly positive and superharmonic. Then u/h has a finite fine limit at μ^h-almost every point of* R ∪ R′.

This theorem will be proved by applying Theorem 4.3. The functions u and h are continuous on R in the fine topology (with the obvious conventions at infinities). In fact one definition of the fine topology on R is that it is the least fine topology making all superharmonic functions continuous. Thus the function u/h has a finite fine limit at each point of R except possibly at an infinity of u. The set of these infinities has zero capacity, but may have strictly positive μ^h-measure. Let $h = h_1 + h_2$, where h_1 is the potential determined by the restriction of μ^h to R and h_2 is the harmonic function determined by the restriction of μ^h to R′. We have already proved that u/h_2 has a finite fine limit μ^h-almost everywhere on R′, and that h_1/h_2 has the fine limit 0 μ^h-almost everywhere on R′. Then u/h has the same fine limit as u/h_2 μ^h-almost everywhere on R′. Let A be a compact subset of the set of infinities of u.

Then A has zero capacity. Suppose that $\mu^h(A) > 0$. (If there is no such set A, there is nothing further to prove). The space $R_0 = R - A$ is (with the obvious conventions) a Green space, and the définition of the Martin boundary yields at once that (with the obvious identifications), the Martin boundary of R_0 is $R' \cup A$. Moreover fine limits relative to R are also fine limits relative to R_0, and conversely. Each point η of A is a minimal boundary point of R_0, with corresponding minimal function the Green function on R with pole η, restricted to R_0. Let h' be the potential determined by the restriction of μ^h to A. Then h' is harmonic on R_0, so u/h' has a finite fine limit relative to R_0 and so also relative to R, μ^h-almost everywhere on A, according to Theorem 4.3. Similarly, h/h' has a finite fine limit, obviously ≥ 1, μ^h-almost everywhere on A. Then u/h has a finite fine limit μ^h-almost everywhere on A, and it follows that the same is true μ^h-almost everywhere on the set of infinities of u, as was to be proved.

The assertion of this theorem about limits on R can be géneralized as follows. *If h is strictly positive and superharmonic and if u is superharmonic, u/h has a finite fine limit at μ^h-almost every point of* R. It is sufficient to prove that u/h has a finite fine limit at μ^h-almost every point of every open subset R_0 of R whose closure is a compact subset of R. In R_0 u is bounded from below by some constant c. Hence $(u - c)/h$ has a finite fine limit at μ^h-almost every point of R_0, according to Theorem 4. 4. (We use the fact that μ^h-measure as defined relative to R_0, and μ^h-measure as defined relative to R, restricted to subsets of R_0, are absolutely continuous relative to each other.) Since $1/h$ has a finite fine limit at every point of R, the stated conclusion is true.

5. On a theorem of Calderon.

Generalizing a theorem of Privalov, Calderon [2] proved the following. *Let u be a function harmonic on an* N-*dimensional halfspace* R. *Suppose that, at each point of a subset* A *of the boundary, u is bounded on the set of points in some neighborhood of the point which lie in some right circular cone with vertex at the point but otherwise in* R. *Then u has a finite non-*

tangential limit at almost every (Lebesgue (N — 1)*-dimensional measure) point of* A. The following theorem generalizes this result in several directions.

THEOREM 5. 1. — *Let* R *be a Green space, with Martin boundary* R′. *Let h and u be superharmonic functions on* R, *with $h > 0$. Suppose that u/h is bounded from below on a fine neighborhood of each point of a set* A *of minimal boundary points. Then u/h has a finite fine limit at μ^h-almost every point of* A.

It is easy to see that boundedness from below of u/h and of u in the stated sets are equivalent hypotheses as far as the conclusion of the theorem is concerned. It is sufficient to prove the theorem, and we shall do so, under the hypothesis that u is strictly positive in some fine neighborhood of each point of A, since, for every positive n, we can replace A by the subset of A for each point of which there is a fine neighborhood in which $u/h > -n$, and then replace u/h by $(u + nh)/h$. Finally, we can and shall suppose that h is harmonic, since the general case can be reduced to the harmonic case as in the proof of Theorem 4.4. Let R_0 be the subset of R on which u is strictly positive. Then R_0 is itself a fine neighborhood of every point of A. The restriction of h to subspace R_0 determines a corresponding measure μ_0^h. According to Theorem 4.4, u/h has a finite fine limit μ_0^h-almost everywhere on the Martin boundary R_0' of R_0. According to a theorem of Naïm [4], each point of A corresponds to a point of R_0', and a fine neighborhood of the latter point relative to R_0 is a fine neighborhood of the former relative to R. Then u/h has a finite fine limit at all points of A except those corresponding to points of a subset of R_0' of μ_0^h-measure 0. But such a set must also have μ^h-measure 0, according to another theorem of Naïm [4], and this finishes the proof of the theorem.

Calderon actually proved a more general theorem than the theorem quoted at the beginning of this section. In fact he considered functions on the direct product of a finite number m of half-spaces, harmonic on each half-space if the remaining arguments are held fast. If $m = 1$ this theorem reduces to the quoted one. Presumably his general theorem has an analogue in a corresponding extension of Theorem 5.1.

BIBLIOGRAPHY

[1] M. Brelot, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin (*J. Math. pures et appl.*, 35 (1956), 297-335).

[2] A. P. Calderon, On the behavior of harmonic functions at the boundary (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 47-54).

[3] J. L. Doob, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions (*Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 431-458).

[4] L. naïm, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel (*Ann. Inst. Fourier*, 7 (1957), 183-281).

UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS B.L.D. DANS UN ESPACE DE GREEN

par M. Godefroid (Montpellier)

On connaît divers résultats sur l'allure à la frontière des fonctions admettant une semi-norme de Dirichlet finie. Ainsi, pour une fonction harmonique et du type précédent dans un domaine circulaire, Beurling a montré (1) que la variation totale sur tout rayon est finie, sauf pour un ensemble de rayons découpant sur la circonférence un ensemble de mesure nulle et même « polaire », c'est-à-dire de capacité extérieure nulle; il y a donc en particulier une limite radiale pour presque tout rayon. On a ensuite adapté le résultat précédent à des fonctions et domaines plus généraux et approfondi en particulier le cas des fonctions de Beppo-Levi-Deny, dites brièvement « B.L.D. » [2] ou « B.L. précisées » [4]. En espace euclidien, elles peuvent être définies comme limite quasi-partout (c'est-à-dire sauf sur un ensemble polaire) et en semi-norme de Dirichlet d'une suite de fonctions à gradient continu de carré sommable. La définition est la même dans un espace de Green $\mathcal{E}$, notion (2) qui contient celles de domaine euclidien borné et de surface de Riemann hyperbolique; il faut simplement considérer la fonction comme non définie aux « points à l'∞ » possibles de $\mathcal{E}$. Choisissons un point P de l'espace de Green $\mathcal{E}$ et considérons l'ensemble $\mathcal{L}$ des « lignes de Green » l issues de P (arcs ouverts *maximaux* tels qu'en chaque point grad G_P soit $\neq 0$ et tangent, G_P étant la fonction de Green de pôle P); dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est un disque euclidien ouvert

(1) Voir par ex. J. Lelong [5], p. 243.
(2) M. Brelot et G. Choquet [3], p. 217.

et P son centre, on retrouve les rayons du cercle. Soit dg la mesure, dite « mesure de Green » de total 1 sur $\mathcal{L}$ et proportionnelle à la mesure angulaire sur l'ensemble des directions de départ en P; on sait (3) que, sur presque toute (au sens de la mesure de Green) ligne $l \in \mathcal{L}$, la borne inférieure de G_P est nulle; on dit qu'une telle ligne est « régulière » et nous noterons leur ensemble $\mathcal{L}'$. Ceci a permis de définir la notion de « radiale » d'une fonction u dans $\mathcal{E}$: c'est, lorsqu'elle existe, une fonction $\varphi(l)$ de $l \in \mathcal{L}'$ telle que $\int |u_l^\lambda - \varphi(l)| dg \to 0$ quand $\lambda \to 0$, u_l^λ désignant la valeur de u au point $G_P = \lambda$ de la ligne l.

M. Brelot a montré (4) que toute fonction u, B.L.D. dans $\mathcal{E}$ admet une radiale (pour tout P). Nous allons préciser ce résultat en montrant que, pour presque toute $l \in \mathcal{L}'$, u_l^λ a une limite finie pour $\lambda \to 0$. On considèrera l'ensemble $\Delta_P^{\lambda_0}$ où $G_P < \lambda_0$; son complémentaire contient P et est compact si λ_0 est $< G_P(P)$ (fini ou non) et assez voisin de ce nombre (car, si $G_P(P)$ est fini, G_P admet en P un maximum strict et $\sup\limits_{\Delta_P^{\lambda_0}} G_P < G_P(P)$). On introduit pour toute fonction u, la variation totale $V_u(l)$ de u_l^λ comme fonction de λ dans l'intervalle $[0, \lambda_0]$. On sait que u_l^λ a une limite finie pour $\lambda \to 0$ si $V_u(l)$ est finie, ce que nous allons utiliser.

Lemme 1. — *Si la fonction u_n sur $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$, $l \in \mathcal{L}'$, a, pour $n \to \infty$, une limite finie u en tout point,* $V_u(l) \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} V_{u_n}(l)$.

Soit en effet K quelconque $< V_u(l)$. On peut trouver une suite finie de points de $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$, M_i, $i = 1, \ldots, p$, telle que $\sum\limits_2^p |u(M_i) - u(M_{i-1})| > K$; or

$$\sum_2^p |u(M_i) - u(M_{i-1})| = \lim_{n \to +\infty} \sum_2^p |u_n(M_i) - u_n(M_{i-1})| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} V_{u_n}(l).$$

Lemme 2. — *Soit dans $\mathcal{E}$ une fonction u_n B.L.D. à gradient continu et semi-norme bornée tendant vers une fonction u supposée finie dans $\Delta_P^{\lambda_0}$ sur toutes les lignes d'un ensemble α de lignes l de $\mathcal{L}'$. Alors $\overline{\int_\alpha} V_u(l)\, dg$ est finie.*

(3) M. Brelot et G. Choquet [3], p. 236 et p. 239, th. 23.
(4) M. Brelot [2], p. 394, th. 5.

En effet

$$\overline{\int_\alpha} V_u(l)\, dg \leqslant \overline{\int_\alpha} \liminf V_{u_n}(l)\, dg \leqslant \liminf \overline{\int_\alpha} V_{u_n}(l)\, dg.$$

Or $V_{u_n}(l)$ est $\leqslant$ à l'intégrale le long de $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$ de $|\text{grad } u_n|$ par rapport à l'arc ds, ce qu'on écrira $\int_{l_0} |\text{grad } u_n|\, ds$. Donc $\overline{\int_\alpha} V_{u_n}(l)\, dg \leqslant \overline{\int_\alpha} \left(\int_{l_0} |\text{grad } u_n|\, ds\right) dg \leqslant \int_{\Delta_P^{\lambda_0}} |\text{grad } u_n|\, |\text{grad } G|\, dv$ d'où la majoration $\sqrt{\int_{\Delta_P^{\lambda_0}} \text{grad}^2\, u_n\, dv}\ \sqrt{\int_{\Delta_P^{\lambda_0}} \text{grad}^2\, G\, dv}$. Le second facteur est fini et le premier borné, donc

$$\liminf_{n \to +\infty} \overline{\int_\alpha} V_{u_n}(l)\, dg$$

est finie.

Lemme 3. — *Les lignes de $\mathfrak{L}$ rencontrant un ensemble polaire* E *donné dans $\Delta_P^{\lambda_0}$ forment un ensemble de mesure dg nulle.*

Soit $M_0 \in E$, appartenant à une ligne de $\mathfrak{L}$. Par tout point M d'un voisinage $\mathfrak{V}$ assez petit passe une ligne de $\mathfrak{L}$ rencontrant une petite « sphère de Green » Σ, $G_P = \lambda_1$, en un point Q. Si M′, Q′ sont les images de M et Q dans les cartes locales des voisinages de M_0 et M_0', l'application $M' \to Q'$ (dans l'espace image des cartes locales de $\mathcal{E}$) est une contraction, à une similitude près, vu la différentiabilité des fonctions qui la définissent. De sorte que, dans les voisinages considérés, la capacité dans cet espace image (dans le plan, capacité logarithmique) est, à un facteur fixe près, diminuée par l'application considérée et un ensemble polaire devient un ensemble polaire. Donc aussi par l'application $M \to Q$. Les lignes de $\mathfrak{L}$ rencontrant $E \cap \mathfrak{V}$ rencontrent Σ selon un ensemble polaire, donc de mesure superficielle nulle sur Σ. Cet ensemble de lignes est donc de mesure dg nulle; le lemme résulte alors de la possibilité de couvrir l'ensemble des points de E situés sur des lignes l par une réunion dénombrable de voisinages tels que $\mathfrak{V}$.

Des trois lemmes ci-dessus résulte que la variation totale le long de $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$ de la fonction u, B.L.D. dans $\mathcal{E}$, est finie pour presque toute ligne l de $\mathfrak{L}'$. Il suffit d'introduire une suite u_n de fonctions B.L.D. à gradient fini continu convergeant en semi-norme et quasi-partout vers u. Donc :

THÉORÈME. — *Si u est* B.L.D. *dans* $\mathcal{E}$, *pour presque toute ligne de Green régulière, u admet une limite finie quand* $G \to 0$ *sur la ligne considérée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT. Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *Journ. de Math.*, XIX, fasc. 4, 1940, p. 319-337.

[2] M. BRELOT. Étude et extensions du principe de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, 5, 1953-1954, p. 371-419.

[3] M. BRELOT et G. CHOQUET. Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, 3, 1951, p. 199-263.

[4] J. DENY et J. L. LIONS. Les espaces du type de Beppo-Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5, 1953-1954, p. 305-369.

[5] J. LELONG-FERRAND. Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

THE REPRESENTATIONS OF LINEAR FUNCTIONALS BY MEASURES ON SETS OF EXTREME POINTS

by Errett BISHOP and Karel de LEEUW [1]

1. — INTRODUCTION

Let X be a compact Hausdorff space. We shall denote by $C_r(X)$ the real Banach space of continuous real valued functions on X, and by $C_c(X)$ the complex Banach space of continuous complex valued functions on X, supplied with norms denoted by $||.||$ and defined by

$$||f|| = \operatorname{Sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Suppose that B is some linear subspace of either $C_r(X)$ or $C_c(X)$ that distinguishes points of X and that contains the constant functions. We are concerned in this paper with the problem of representing the linear functionals in the dual space B^* of B by measures on X. It is well known that such representations are always possible; if B is a linear subspace of $C_r(X)$, by the Hahn-Banach theorem, any L in B^* extends to a continuous linear functional of $C_r(X)$ and thus by the Riesz representation theorem, there will be some signed Baire measure μ on X so that

$$(1.1) \qquad L(f) = \int f\, d\mu, \quad \text{all } f \text{ in B}.$$

If B is a linear subspace of $C_c(X)$, a similar argument shows

[1] The authors wish to thank the Sloan Foundation and the United States Air Force Office of Scientific Research, respectively, for the support of this research.

that each L in B^* has a representation of the form (1. 1) for μ a complex valued Baire measure.

There are cases in which it is possible to find a subset Y of X which is such that each L in B^* has a representation of the form (1. 1) for some μ concentrated on Y. In this paper we introduce such a subset, the *Choquet boundary* of B.

The Choquet boundary of B is denoted by M(B) and consists of all points x in X having the following property: there is a *unique positive* Baire measure μ that represents, in the sense of (1. 1), the linear functional L_x defined by

$$L_x(f) = f(x), \quad \text{all } f \text{ in B.} \tag{1. 2}$$

This unique μ will of course be the unit point mass at x. In the case that B is a uniformly closed subalgebra of $C_c(X)$ and X is metrizable, M(B) is the *minimal boundary* of [3] and [4].

We show in Section 4 that the extreme points of the subset

$$\{L : L \in B^*, \quad L(1) = ||L|| = 1\}$$

of B^* are those L_x défined by (1. 2) for x in M(B).

From this and the Krein-Milman theorem it follows easily that any L in B^* has a representation of the form (1. 1) with μ a measure concentrated on the *closure* of M(B).

The question that concerns us is whether it is possible to choose the measure μ so that it is concentrated on M(B) itself. If X is metrizable, an application of the theorem of Choquet in [7] shows that this is indeed possible. We proceed in the reverse direction, showing directly that the measure can be concentrated on M(B); this leads to a relatively simple proof of the Choquet theorem.

In the case that X is not metrizable the situation is much more complicated. We give examples in the concluding section of the paper to show that M(B) need not even be a Borel set. We prove nevertheless that each L in B^* has a representation of the form (1. 1) for a measure μ that is « concentrated on M(B) » in following sense: it is a measure on the σ-ring generated by M(B) and the Baire sets of X, and is zero on each set in this σ-ring which is disjoint from M(B). Furthermore if $L(1) = ||L||$, the measure μ can be chosen to be non-negative. This leads to an extension of the theorem of Choquet to convex sets that are not metrizable.

The existence of measures concentrated on the Choquet boundary is obtained roughly as follows. An ordering relation on the class of non-negative Baire measures on X is introduced. We say that μ is a B-cover of η if

$$\int f\, d\eta = \int f\, d\mu, \qquad \text{all } f \text{ in B},$$

and

$$\int f^2\, d\eta \leq \int f^2\, d\mu, \qquad \text{all } f \text{ in B}. \tag{1. 3}$$

We say that μ is a *proper B-cover* of η if μ is a B-cover of η and furthermore the inequality in (1. 3) is strict for some f in B. η is called *B-maximal* if it has no proper B-cover. A simple argument using Zorn's Lemma and weak* compactness assures for any given non-negative Baire measure η, the existence of a B-maximal μ that is a B-cover for η. The crucial result now is theorem 5. 3 which shows that $\mu(S) = 0$ if μ is B-maximal and S is disjoint from M(B). From this it follows simply that any B-maximal μ can be extended to a measure « concentrated on M(B) » in the sense described above. Since each linear functional in B* has a representation of the form (1. 1) for some Baire measure μ on X, and such a μ is a linear combination of non-negative Baire measures, and each non-negative Baire measure has a B-maximal B-cover that is concentrated on M(B), it follows that any linear functional in B* has a representation of form (1. 1) for some μ concentrated on M(B).

Section 6 is devoted to uniformly closed subalgebras of $C_c(X)$. We give somewhat simpler proofs of some of the results of [3] and [4] and remove the hypothesis of metrizability of X imposed there. We show that if A is a uniformly closed subalgebra of $C_c(X)$ that distinguishes points of X and contains the constant functions, the points x of M(A) can be characterized by either of the following conditions:

I. For each neighborhood U of x there is a function f in A with $\|f\| \leq 1$, $f(x) > \frac{3}{4}$ and $|f(y)| < \frac{1}{4}$ for all y not in U.

II. If S is a closed G_δ containing x, then there is some f in A with $|f(x)| = \|f\|$ and $\{y : |f(y)| = \|f\|\} \subset S$.

A subset Y of X is said to be a *boundary for A* if for each f

in A there is some y in Y with $|f(y)| = ||f||$. It is a simple consequence of the Krein-Milman theorem that the Choquet boundary of A is a boundary for A. Condition II shows that in addition, any Baire subset of X that is a boundary for A must contain M(A). Furthermore if X has the property that each point is a G_δ (in particular if X is metrizable), condition II shows that for each point x of M(A) there is some f in A that « peaks » at x, so that M(A) is the smallest boundary for A, that is, the *minimal boundary* (for X metrizable, this was established in [3] and [4]). If not every point of X is a G_δ, there may be no smallest boundary, even if A is all of $C_c(X)$.

Since each L in A^* has a representation of the form (1. 1) for μ a measure concentrated on M(A), it is reasonable to inquire whether for any set Y that is a boundary for A, a measure can be found that represents L and is concentrated on Y. We show by example in Section 7 that this cannot be done for linear subspaces of $C_c(X)$ that are not subalgebras. Nevertheless we are able to show that for subalgebras such measures can always be found. The existence of these measures was suggested to us by Irving Glicksberg, who studied essentially the same problem for the case $A = C_c(X)$ in [8].

In all that follows, by « subspace of $C_r(X)$ » (or « of $C_c(X)$ ») we shall mean a linear subspace *containing the constant functions*, but not necessarily closed or distinguishing points of X. For applications it is useful to have results concerning not necessarily closed linear subspaces; furthermore it is necessary for technical reasons for us to consider linear subspaces that do not distinguish points of X. By « measure » in the following, we shall always mean finite measure.

II. — THE BASIC DEFINITIONS

In the following X is a fixed compact Hausdorff space. We shall denote by H the class of all non-negative Baire measures on X. This class H will be identified in the usual manner with a subset of the dual space of $C_r(X)$. By the weak*

topology of H we shall mean the restriction to H of the weak* topology on the dual space of $C_r(X)$. The basic fact concerning the weak* topology that we shall need is that bounded closed subsets of H are weak* compact.

The following allows us to reduce questions concerning linear functionals on subspaces of $C_r(X)$ or $C_c(X)$ to questions about the Baire measures in H.

Lemma 2. 1. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$ *or* $C_c(X)$. *Then each* L *in* B* *has a representation of the form*

$$L(f) = \int f\, d\mu, \qquad \text{all } f \text{ in B}; \tag{2. 1}$$

where μ *is a Baire measure which is of the form*

$$\mu_1 - \mu_2, \qquad \mu_1, \mu_2 \textit{ in } H, \tag{2. 2}$$

if B *is a subspace of* $C_r(X)$, *and of the form*

$$\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4, \qquad \mu_1, \ldots, \mu_4 \text{ in } H,$$

if B *is a subspace of* $C_c(X)$. *Furthermore the* μ *in* (2. 1) *can be chosen to be in* H *if and only if* $L(1) = ||L||$.

Proof. — We shall treat the case of B a subspace of $C_r(X)$; the proof for $C_c(X)$ is completely analogous. By the Hahn-Banach theorem, L can be extended to all of $C_r(X)$ with preservation of norm; i.e. there is a linear functional L′ on $C_r(X)$ with

$$L'(f) = L(f), \quad \text{all } f \text{ in B},$$

and $||L'|| = ||L||$. By the Riesz representation theorem, there is a signed Baire measure μ on X so that

$$L'(f) = \int f\, d\mu, \quad \text{all } f \text{ in } C_r(X).$$

Each signed Baire measure on X is of the form (2. 2). If $L(1) = ||L||$, then

$$||\mu|| = ||L'|| = ||L|| = L(1) = \mu(X),$$

so μ must be non-negative and thus in H. Conversely if μ is in H, the L defined by (2. 1) clearly satisfies $L(1) = ||L||$.

If B is a subspace of $C_r(X)$ or $C_r(X)$, and x is a point of X, we define $H_x(B)$ to be the subset of H consisting of all μ with

$$\int f\, d\mu = f(x), \quad \text{all } f \text{ in B}. \tag{2. 3}$$

$H_x(B)$ is always non-empty since it must contain at least the unit point mass at x. Since subspaces are assumed to contain the constant functions, by (2. 3) each μ in $H_x(B)$ satisfies $\mu(X) = 1$.

If S is any subset of X and B is any collection of functions on X, we define $i_B(S)$ to be the subset of X consisting of those points that cannot be distinguished from points of S by the functions in B; i.e. $i_B(S)$ is

$$\{y : f(y) = f(x) \quad \text{for some} \quad x \in S \text{ and all } \quad f \in B\}.$$

If μ is any Baire measure in H, we denote by $\hat{\mu}$ its regular Borel extension. This is the unique regular Borel measure on X that agrees with μ on the Baire sets of X. It is defined by

$$\hat{\mu}(S) = \operatorname{Inf} \mu(U),$$

where U runs over all open Baire sets that contain S.

If B is a subspace of either $C_r(X)$ or $C_c(X)$, the *Choquet boundary* of B, denoted by M(B), is defined to consist of those points x in X which are such that any μ in $H_x(B)$ satisfies $\hat{\mu}(i_B(x)) = 1$. If B contains sufficiently many functions to distinguish a point x from all other points of X, $i_B(x) = \{x\}$, so that x will be in the Choquet boundary of B if and only if the unit point mass at x is the only μ in $H_x(B)$.

If B is a subspace of $C_c(X)$, we shall denote by B_r the subspace of $C_r(X)$ consisting of real parts of the functions in B. The following is immediate.

LEMMA 2. 2. — $M(B_r) = M(B)$, *and for each x in* X, $H_x(B_r) = H_x(B)$.

We next introduce some ordering relations on H which are basic to the constructions that follow.

If B is a subspace of $C_r(X)$ and μ and η are in H, we shall say that μ is a B-*cover* of η if

$$\int f\, d\eta = \int f\, d\mu, \qquad \text{all } f \text{ in B},$$

and

$$\int f^2\, d\eta \leq \int f^2\, d\mu, \qquad \text{all } f \text{ in B}. \tag{2. 4}$$

We shall say that μ is a *proper B-cover* of η if μ is a B-cover of η and furthermore the inequality (2. 4) is strict for some f in B.

A measure η will be called *B-maximal* if it has no proper *B-cover*.

Much of the work done in the remainder of the paper goes into demonstrating that any B-maximal measure must be concentrated on the Choquet boundary of B.

The following two lemmas will be applied later.

LEMMA 2. 3. — *Let x be a point of* X *and η in* H *be the unit point mass at x. Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$. *Then any μ in* $H_x(B)$ *is a* B-*cover of* η.

PROOF. — By the Schwarz inequality, for each f in B,

$$\int f^2\,d\mu = \int f^2\,d\mu \int 1^2\,d\mu \geq \left|\int f\,d\mu\right|^2 = (f(x))^2 = \int f^2\,d\eta.$$

Furthermore

$$\int f\,d\mu = f(x) = \int f\,d\eta$$

for all f in B.

LEMMA 2. 4. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$. *Then each η in* H *has a B-cover that is B-maximal.*

PROOF. — Consider subsets $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ of H indexed by totally ordered sets J, where the ordering is such that μ_β is a B-cover of μ_α if $\alpha < \beta$. By Zorn's lemma there is a maximal such subset $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ that contains η. Since B contains the constant functions, each μ_α is in

$$\{\nu : \nu \in H,\quad \nu(X) = \eta(X)\}. \tag{2. 5}$$

(2. 5) is compact in the weak* topology and thus contains a weak* cluster point μ for the net $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$. It is clear that μ is a B-cover of η and that μ is B-maximal.

III. — REPRESENTATION OF LINEAR FUNCTIONALS IN THE SEPARABLE CASE.

The main result in this section is Theorem 3. 2. Using it we establish in Theorem 3. 4 the possibility of representing linear functionals on B by measures on the Choquet boundary of B in the case that B is separable, that is, has a countable

dense subset. Theorem 3. 2 will also be applied later in the non-separable case.

We shall need the following well known lemma.

LEMMA 3. 1. — *Let* S *be a closed subset of* X. *Then for each positive real number c, the subset*

$$\{\mu : \mu \in H, \quad \mu(X) = \hat{\mu}(T) = c, \quad \textit{for some finite} \quad T \subset S\}$$

of H *is dense in*

$$\{\mu : \mu \in H, \quad \mu(X) = \hat{\mu}(S) = c\}$$

in the weak topology.*

We can now prove

THEOREM 3. 2. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$, *and* μ *in* H *be a B-maximal measure. Let* S *be a closed subset of* X *which has the following property: there is a separable subspace* D *of* B *so that for each* x *in* S *there is some* σ *in* $H_x(B)$ *with* $\sigma(i_D(x)) < 1$. *Then* $\hat{\mu}(S) = 0$.

The statement of this theorem is necessarily complicated as it must be applied later to the situation where B is not separable. In that case D will necessarily be a proper subspace of B and will not distinguish points of X. In the application in this section however D = B, and in this case the hypothesis on S in the theorem becomes simply that it be disjoint from the Choquet boundary of B.

PROOF OF THEOREM 3. 2. — Let $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ be a countable subset of D that is dense in D. For each pair of positive integers n and m define L_{nm} to be the subset of X consisting of all x for which there is some μ in $H_x(B)$ with.

$$\int f_n^2 \, d\mu \geq \frac{1}{m} + (f_n(x))^2. \tag{3. 1}$$

L_{nm} is closed. For if $\{x_\alpha\}$ is a net of points in L_{nm} converging to a point x in X, and if for each α a measure μ_α is chosen in $H_{x_\alpha}(B)$ so that

$$\int f_n^2 \, d\mu_\alpha \geq \frac{1}{m} + (f_n(x_\alpha))^2,$$

by the weak* compactness of

$$\{\mu : \mu \in H, \qquad \mu(X) = 1\}$$

the net $\{\mu_\alpha\}$ will have a weak* cluster point μ in $H_x(B)$, and μ will satisfy (3. 1).

We will show next that

$$S \subset \bigcup L_{nm}. \tag{3. 2}$$

Let x be a point of X that is in none of the L_{nm}. Let σ be in $H_x(B)$. By the definition of the L_{nm},

$$\int f_n^2 \, d\sigma \leq (f_n(x))^2 = \left|\int f_n \, d\sigma\right|^2. \tag{3. 3}$$

On the other hand, by the Schwarz inequality,

$$\int f_n^2 \, d\sigma = \int f_n^2 \, d\sigma \int 1^2 \, d\sigma \geq \left|\int f_n \, d\sigma\right|^2, \tag{3. 4}$$

with equality if and only if f_n is constant a.e. with respect to σ. Comparing (3. 3) and (3. 4) we see that each f_n must be constant a.e. with respect to σ. Since also $f_n(x) = \int f_n \, d\sigma$, it follows that f_n is equal to $f_n(x)$ a.e. with respect to σ for each n. Thus the set

$$i_D(x) = [y : f_n(y) = f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots]$$

has σ measure 1. Since this holds for each σ in $H_x(B)$, x cannot be in S. This completes the proof of the inclusion (3. 2).

We now show that $\hat{\mu}(S) > 0$ contradicts the B-maximality of μ. Suppose that $\hat{\mu}(S) > 0$. Then by (3. 2), $\hat{\mu}(L_{nm}) > 0$ for some L_{nm}. Let ν be the measure in H that is the restriction of μ to L_{nm}: i.e., $\nu(T) = \hat{\mu}(T \cap L_{nm})$ for all Baire sets T. Now $\nu \not\equiv 0$ since $\nu(X) = \hat{\mu}(L_{nm}) \neq 0$. By Lemma 3. 1, ν is the limit in the weak* topology of a net $[\nu_\alpha]$ of measures in H with $\nu_\alpha(X) = \nu(X)$ and each ν_α concentrated on a finite subset of L_{nm}. By Lemma 2. 3 and the definition of L_{nm} it follows that there exists a corresponding net $[\eta_\alpha]$ of measures in H such that each η_α is a B-cover of ν_α and in addition that

$$\int f_n^2 \, d\eta_\alpha \geq \frac{\nu(X)}{m} + \int f_n^2 \, d\nu_\alpha.$$

If η is any weak* cluster point of the net $[\eta_\alpha]$, η is a B-cover of ν and

$$\int f_n^2 \, d\eta \geq \frac{\nu(X)}{m} + \int f_n^2 \, d\nu.$$

Thus η is a *proper* B-cover of ν and it follows that $(\mu - \nu) + \eta$

is a proper B-cover of μ. This contradicts the B-maximality of μ and shows that $\hat{\mu}(S)$ must be 0. This completes that proof of Theorem 3. 2.

COROLLARY 3. 3. — *Let* D *be a separable subspace of* $C_r(X)$. *Then the Choquet boundary of* D *is a* G_δ. *If* η *is any measure in* H, *then there is some measure* μ *in* H *with*

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\eta, \quad \text{all } f \text{ in D,} \tag{3. 5}$$

and which is concentrated on M(D); *i.e. satisfies* $\hat{\mu}(M(D)) = \mu(X)$.

PROOF. — Let $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ be a countable subset of D that is dense in D. Define the closed subsets L_{nm} of X as in the proof of theorem 3. 2. We shall show that M(D) is the complement of $\bigcup L_{nm}$ and is thus a G_δ. Let x be any point which is not in M(D). Then that part of the hypothesis of theorem 3. 2 which concerns B, D, and S is satisfied if B is taken to be D and S to be $\{x\}$. The proof of Theorem 3. 2 shows that x is in $\bigcup L_{nm}$. Conversely, from the definition of the L_{nm} it is clear that no point in $\bigcup L_{nm}$ can be in M(D). Thus M(D) is a G_δ as claimed.

Now let η be any measure in H. Let μ be a D-maximal measure in H that is a D-cover of η. The existence of such a μ is guaranteed by Lemma 2. 4. Equality (3. 5) holds since μ is a D-cover of η. To show that $\hat{\mu}(M(D)) = \mu(X)$, by regularity of $\hat{\mu}$ it suffices to show that $\hat{\mu}(S) = 0$ for each closed S that is disjoint from M(D). That this holds is a consequence of Theorem 3. 2 for the special case D = B. This completes the proof of Corollary 3. 3.

The following is an immediate consequence of Lemma 2. 1 and Corollary 3. 3.

THEOREM 3. 4. — *Let* D *be a separable subspace of* $C_r(X)$ *or* $C_c(X)$. *Then any linear functional* L *in* D^* *has a representation of the form*

$$L(f) = \int f\, d\mu, \quad \text{all } f \text{ in D,} \tag{3. 6}$$

for μ a Baire measure on X that is concentrated on M(D) in the sense that $\hat{\mu}(S) = 0$ for each Borel set S disjoint from M(D). Furthermore the μ in (3. 6) can be chosen to be in H if and only if $L(1) = \|L\|$.

IV. — EXTREME POINTS AND THE CHOQUET THEOREM

Let E be a real locally convex topological linear space with dual space E^*. Let X be a compact convex subset of E and B the linear subspace of $C_r(X)$ consisting of all functions f having the form

$$f(x) = F(x) + c, \qquad \text{all } x \text{ in } X,$$

for some F in E^* and some real constant c.

If μ is a real-valued measure on X whose domain includes the Baire sets of X and if S is a Baire subset of X, we shall denote by

$$(4.1) \qquad \int_S y \, d\mu\,(y)$$

the unique element v of E that satisfies $F(v) = \int_S F \, d\mu$ for each F in E^*. We shall use standard properties of the vector valued integral (4. 1) that are discussed for example in [6]. The following lemma was announced by Bauer in [2].

Lemma 4. 1. — *Let x be a point of* X. *Then the following are equivalent:*

1. *x is an extreme point of* X.
2. *x is in* M(B).

Proof. — To show that 2 implies 1, let x be a point of X that is not extreme. Then $x = \frac{1}{2}(u + v)$ for some u and v in X with $u \neq v$. Thus the measure μ in H that satisfies $\hat{\mu}(\{u\}) = \hat{\mu}(\{v\}) = \frac{1}{2}$ and $\hat{\mu}(X) = 1$ is in $H_x(B)$ by the definition of B. Since the functions of B distinguish points of X, $i_B(x) = \{x\}$ so $\mu(i_B(x)) = 0$ and x is not in M(B).

To show that 1 implies 2, suppose that x is an extreme point of X. Let μ be in $H_x(B)$. We shall show that μ is the unit point mass at x so that x is in the Choquet boundary of B. Since μ is in $H_x(B)$, $x = \int y \, d\mu(y)$. If S is any Baire subset

of X with $0 < \mu(S) < 1$, and $T = X - S$, x has a representation as a convex combination

$$(4.2) \quad x = \mu(S)\left(\frac{1}{\mu(S)}\int_S y \, d\mu(y)\right) + \mu(T)\left(\frac{1}{\mu(T)}\int_T y \, d\mu(y)\right)$$

of points in X. Since x is an extreme point of X,

$$(4.2) \quad \mu(S)x = \int_S y \, d\mu(y), \qquad \text{all Baire} \qquad S \subset X.$$

Equivalently,

$$(4.3) \quad \mu(S)F(x) = \int_S F \, d\mu, \qquad \text{all Baire} \qquad S \subset X, \; F \in E^*.$$

(4. 3) is possible only if

$$(4.4) \quad \mu(\{y : F(y) = F(x)\}) = 1, \qquad \text{all} \qquad F \in E^*.$$

If $C(\mu)$ is the carrier of μ, that is, the smallest closed subset of X whose complement has $\hat{\mu}$ measure 0, (4. 4) shows that

$$C(\mu) \subset \{y : F(y) = F(x)\}, \qquad \text{all } F \in E^*.$$

But since the functions in E^* distinguish points of X, $C(\mu)$ must be $\{x\}$ and μ must be the unit point mass at x. Thus x is in M(B) and the proof of Lemma 4. 1 is completed.

We can now establish the Choquet theorem by using our Theorem 3. 4.

Theorem 4. 2. — *Let* X *be a compact convex* metrizable *subset of a locally convex topological linear space.* E. *Let* X_e *be the set of extreme points of* X. *Then* X_e *is a* G_δ *in* X *and every* x *in* X *has a representation of the form*

$$(4.5) \qquad x = \int y \, d\mu(y)$$

for some non-negative Baire measure μ *on* X *satisfying*

$$\mu(X_e) = \mu(X) = 1.$$

Proof. — Let B be the subspace of $C_r(X)$ defined earlier. Since X is metrizable, B is separable, so $X_e = M(B)$ is a G_δ in X. Let x be a point in X and L the linear functional of B defined by

$$L(f) = f(x), \qquad \text{all } f \text{ in B}.$$

Then $L(1) = ||L|| = 1$, so by Theorem 3. 4 there is a non-negative Baire measure μ with $\mu(M(B)) = \mu(X) = 1$ and

$$L(F) = \int F\, d\mu, \quad \text{all } F \text{ in } E^*. \tag{4. 6}$$

But (4. 6) is simply a restatement of (4. 5). And $\mu(X_e) = 1$ since by Lemma 4. 1, $X_e = M(B)$. This completes the proof.

Lemma 4. 1. gives a characterization of the Choquet boundary in terms of extreme points in a very special situation. It will be necessary for our later work to have a suitable replacement of this in the general case.

Lemma 4. 3. — *Let* X *be a compact Hausdorff space,* B *a subspace of* $C_r(X)$. *Let* L_0 *be a linear functional in* B^*. *Then the following are equivalent:*

1. L_0 *is an extreme point of*

$$\{L : L \in B^*, \quad L(1) = ||L|| = 1\} \tag{4. 7}$$

2. *There is a point* x *in* M(B) *so that*

$$L_0(f) = f(x), \quad \text{all } f \text{ in B.}$$

Proof. — To show that 2 implies 1, suppose that L_0 is not an extreme point of (4. 7). $L_0 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$, with L_1 and L_2 in (4. 7), $L_1 \neq L_0$. By Lemma 2. 1 there are measures μ_1 and μ_2 in H with $\mu_1(X) = \mu_2(X) = 1$ and

$$L_i(f) = \int f\, d\mu_i, \quad \text{all } f \text{ in B}, \quad i = 1, 2.$$

Since $L_0 \neq L_1$, $\mu_1(i_B(x)) < 1$. Let $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$. Then μ is in $H_x(B)$ and $\mu(i_B(x)) < 1$, so x is not in M(B). This completes the proof that 2 implies 1.

To show that 1 implies 2, suppose that L_0 is an extreme point of (4. 7). By Lemma 2. 1 there is a measure μ in H so that

$$L_0(f) = \int f\, d\mu, \quad \text{all } f \text{ in B.}$$

Let S_1 be any Baire subset of X with $0 < \mu(S_1) < 1$, and $S_2 = X - S_1$. Then if the linear functionals L_1 and L_2 in (4. 7) are defined by

$$L_i(f) = \frac{1}{\mu(S_i)} \int_{S_i} f\, d\mu, \quad \text{all } f \text{ in B},$$

we have a representation of L_0 as a convex combination

$$L_0 = \mu(S_1) L_1 + \mu(S_2) L_2$$

of points in (4. 7). Since L_0 is an extreme point of (4. 7), this must be a trivial representation, so

$$\int_S f\, d\mu = \mu(S) \int f\, d\mu,$$

for all f in B and all Baire S in X. Thus each f in B is constant almost everywhere with respect to μ, and if x is chosen to be in the carrier $C(\mu)$, of μ, that constant value must be $f(x)$. This shows that $L_0(f) = f(x)$ for all f in B and that

$$(4.\,8) \quad C(\mu) \subset \{y : f(y) = f(x), \quad \text{all } f \text{ in } B\} = i_B(x).$$

Since μ could have been chosen to be any measure in $H_x(B)$, (4. 8) shows that x is in M(B). This completes the proof of the lemma.

Lemma 4. 3. allows us to draw a useful conclusion concerning the relation between M(B) and (CM) where B is a subspace of $C_r(X)$ and C is a subspace of B.

For this we need the following.

Lemma 4. 4. — *Let* E_1 *and* E_2 *be real locally convex topological linear spaces and* $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ *a continuous linear transformation. Let* Y *be a compact convex subset of* E_1. *Then for each extreme point* v *of* $\varphi(Y)$ *there is some extreme point* u *of* Y *with* $\varphi(u) = v$.

Proof. — Let u be an extreme point of $\varphi^{-1}(v) \cap Y$. Such exist because of the Krein-Milman theorem. Then u will be extreme in Y and satisfy $\varphi(u) = v$.

Corollary 4. 5. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$ *and* C *a subspace of* B. *Then*

$$M(C) \subset i_C(M(B)).$$

Proof. — Let $\varphi : B^* \rightarrow C^*$ be the adjoint map of the natural injection of C into B; φ is continuous in the weak* topologies. Because of the Hahn-Banach theorem, the image of the weak* compact set

$$(4.\,9) \qquad \{L : L \in B^*, \quad L(1) = \|L\| = 1\}$$

under φ is

$$(4.\,10) \qquad \{L : L \in C^*, \quad L(1) = \|L\| = 1\}.$$

Let x be a point in M(C). Then by Lemma 4. 3 the linear functionnal L_x in C^* defined by

$$L_x(f) = f(x), \quad \text{all } f \text{ in C},$$

is an extreme point of (4. 10). By Lemma 4. 4, L_x is the image under φ of an extreme point of (4. 9), which must by Lemma 4. 3 be of the form L_y,

$$L_y(f) = f(y), \quad \text{all } f \text{ in B},$$

for some y in M(B); $\varphi(L_y) = L_x$ means simply that L_y when restricted to C agrees with L_x, that is,

$$(4.11) \qquad f(x) = f(y), \quad \text{all } f \text{ in C}.$$

Since y is in M(B), (4. 11) shows that x is in $i_C(M(B))$. Since x was any point in M(C), it follows that $M(C) \subset i_C(M(B))$, as was to be proved.

It is worth noting that under the hypotheses of Corollary 4. 5, neither $M(C) \subset M(B)$ nor $M(B) \subset M(C)$ holds in general.

V. — REPRESENTATION OF LINEAR FUNCTIONALS IN THE GENERAL CASE

The purpose of this section is to extend our Theorem 3. 4 on the representation of linear functionals to the case of subspaces that are not separable, and to use this result to remove the hypothesis of metrizability in the Choquet theorem.

If B is a subspace of $C_r(X)$ that distinguishes points of X, the fact that any linear functional in B^* can be represented by a measure concentrated on the Choquet boundary of B follows simply from the following (which is our Theorem 5. 3) : If μ in H is B-maximal and S is a Baire set disjoint from M(B), then $\mu(S) = 0$. This in turn is an immediate consequence of Theorem 3. 2 if it is possible to find for each x in S a measure σ in $H_x(B)$ with $\sigma(S) < 1$. It is the establishment of the existence of these measures that is the main work of this section. This is accomplished by a reduction to the separable case and an application of Corollary 3. 3.

For each subset S of X, we shall denote by χ_S the characteristic function of S,

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ in S} \\ 0, & x \text{ not in S}. \end{cases}$$

LEMMA 5. 1. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$, S *a closed subset of* X *and* x *a point of* S. *Then the following are equivalent:*

1. *Each* μ *in* $H_x(B)$ *has* $\hat{\mu}(S) = 1$,
2. *For each* g *in* $C_r(X)$ *with* $g \geqq \chi_S$, *Sup* $\{f(x) : f \in B,\ f \leqq g\} \geqq 1$.

PROOF. — Suppose that 2 holds. Let μ be in $H_x(B)$. Then for each g in $C_r(X)$ with $g \geqq \chi_S$,

$$\int g\, d\mu \geqq \operatorname{Sup}\left\{\int f\, d\mu : f \in B,\quad f \leqq g\right\} = \operatorname{Sup}\{f(x) : f \in B,\quad f \leqq g\} \geqq 1.$$

But $$\hat{\mu}(S) = \operatorname{Inf}\left\{\int g\, d\mu : g \in C_r(X),\quad g \geqq \chi_S\right\},$$

so $\hat{\mu}(S) \geqq 1$.

For the converse suppose that 2 does not hold. Let g be a function in $C_r(X)$ with $g \geqq \chi_S$ and

$$\operatorname{Sup}\{f(x) : f \in B,\quad f \leqq g\} = 1 - \varepsilon.$$

Define the linear functional L_x on B by

$$L_x(f) = f(x), \qquad \text{all } f \text{ in B}. \tag{5. 1}$$

L_x is a positive linear functional on B (that is, non-negative on non-negative functions) and thus by a standard result (see [10], p. 22) on the extension of such functionals, there is a positive linear functional L on $C_r(X)$ with

$$L(f) = L_x(f), \quad \text{all } f \text{ in B}, \tag{5. 2}$$

and $L(g) = 1 - \varepsilon$. By the Riesz representation theorem, there is a μ in H with

$$L(f) = \int f\, d\mu, \quad \text{all } f \text{ in } C_r(X). \tag{5. 3}$$

Because of (5. 1), (5. 2) and (5. 3), μ is in $H_x(B)$ and

$$\hat{\mu}(S) = \int \chi_S\, d\mu \leqq \int g\, d\mu = 1 - \varepsilon < 1.$$

This completes the proof of Lemma 5. 1.

LEMMA 5. 2. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$ *and* S *a closed* G_δ *in* X. *Let* x *be a point of* S. *Suppose that each* μ *in* $H_x(B)$ *satisfies* $\mu(S) = 1$. *Then there is a* separable *subspace* C *of* B *which is such that each* μ *in* $H_x(C)$ *satisfies* $\mu(S) = 1$.

PROOF. — Since S is a closed G_δ, there is a sequence

$$\{g_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

in $C_r(X)$ decreasing point wise to χ_S. By « 1 implies 2 » of Lemma 5. 1, for each positive n and m it is possible to find some f_{nm} in B with $f_{nm} \leq g_n$ and $f_{nm}(x) \geq 1 - m^{-1}$. Let C be the subspace of B generated by the f_{nm} and the constant functions. C is a separable subspace. If μ is in $H_x(C)$, then

$$\mu(S) = \operatorname*{Inf}_n \int g_n \, d\mu \geq \operatorname*{Inf}_n \left(\operatorname*{Sup}_m \int f_{nm} \, d\mu \right) = \operatorname*{Inf}_n \left(\operatorname*{Sup}_m f_{nm}(x) \right) \geq 1,$$

so $\mu(S)$ must be 1.

THEOREM 5. 3. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$ *that distinguishes points of* X. *If* S *is a Baire set disjoint from* M(B), *and* μ *in* H *is B-maximal, then* $\mu(S) = 0$.

PROOF. — By regularity of μ we can assume S closed Baire and thus a G_δ. B distinguishes points of X so there will be a separable subspace D of B that distinguishes the points of S from those of X — S; i.e. that satisfies $i_D(S) = S$. We consider two cases.

Case 1 : For each x in S there is a σ in $H_x(B)$ with $\sigma(S) < 1$.

Case 2 : For some x in S, and all σ in $H_x(B)$, $\sigma(S) = 1$.

We shall use Theorem 3. 2 to show that $\mu(S) = 0$ follows in case 1, and then use Corollories 3. 3 and 4. 5 and Lemma 5. 2 to show that case 2 cannot occur.

Case 1 : Since $i_D(S) = S$, for each x in S, $i_D(x) \subset S$. Thus for each x in S there is some σ in $H_x(B)$ with $\sigma(i_D(x)) \leq \sigma(S) < 1$, so by Theorem 3. 2, $\mu(S) = 0$.

Case 2 : If each σ in $H_x(B)$ satisfies $\sigma(S) = 1$, then by Lemma 5. 2 there is a separable subspace C of B (which can be chosen to contain D) so that each σ in $H_x(C)$ satisfies $\sigma(S) = 1$. We shall now use Corollary 3. 3 to contradict this by showing that there actually is a σ in $H_x(C)$ with $\sigma(S) = 0$. Since $D \subset C$ and $i_D(S) = S$, $i_C(S) = S$, and S will be disjoint

from $i_C(M(B))$ since it is disjoint from $M(B)$. But by Corollary 4. 5, $M(C) \subset i_C(M(B))$, so S is disjoint from $M(C)$. By Corollary 3. 3 applied to the unit mass η at x, there is a σ in $H_x(C)$ with $\hat{\sigma}(M(C)) = 1$ and thus with $\sigma(S) = 0$. This contradicts the earlier assertion that each σ in $H_x(C)$ must satisfy $\sigma(S) = 1$. Thus Case 2 cannot occur, and Theorem 5. 3 is completely proved.

Corollary 5. 4. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$ *that distinguishes points of* X. *Let* μ *in* H *be* B-*maximal. Then* μ *can be extended to a measure that is concentrated on* M(B); *to be precise, there is a measure* $\tilde{\mu}$ *on the* σ-*ring generated by* M(B) *and the Baire sets that satisfies*

$$\tilde{\mu}(S) = \mu(S), \qquad \textit{all Baire } S,$$

and

$$\tilde{\mu}(M(B)) = \tilde{\mu}(X) = 1.$$

Proof. — Any set T in the σ-ring generated by M(B) and the Baire sets has a representation of the form

$$(5.4) \quad T = \{S_1 \cap M(B)\} \cup \{S_2 \cap (X - M(B))\}, \quad S_1, S_2 \text{ Baire.}$$

It is simple to check, using Theorem 5. 3, that if $\tilde{\mu}$ is defined by

$$\tilde{\mu}(T) = \mu(S_1), \qquad \text{with } S_1 \text{ as in (5. 4),}$$

$\tilde{\mu}$ is well defined and satisfies the conditions claimed.

The following is now an immediate consequence of Lemmas 2. 1, 2. 4 and Corollary 5. 4.

Theorem 5. 5. — *Let* B *be a subspace of* $C_r(X)$ *or* $C_c(X)$ *that distinguishes points of* X. *Let* $\mathcal{S}$ *be the* σ-*ring generated by* M(B) *and the Baire sets of* X. *Then any linear functional* L *in* B^* *has a representation of the form*

$$(5.5) \qquad L(f) = \int f\, d\mu, \qquad \text{all } f \text{ in } B,$$

for μ *a measure on* $\mathcal{S}$ *that satisfies* $\mu(T) = 0$ *for each* $T \in \mathcal{S}$ *disjoint from* M(B). *Furthermore the* μ *in* (5. 5) *can be chosen to be non-negative if and only if* $L(1) = ||L||$.

We can now state the generalized Choquet theorem. Its proof is identical with that of Theorem 4. 2, except that Theorem 5. 5 is used instead of Theorem 3. 4.

THEOREM 5. 6. — *Let* X *be a compact convex subset of a real locally convex topological linear space. Let* X_e *be the set of extreme points of* X *and* $\mathcal{S}$ *the* σ*-ring generated by* X_e *and the Baire subsets of* X. *Then each* x *in* X *has a representation of the form*

$$\int y \, d\mu(y)$$

for some non-negative measure μ *on* $\mathcal{S}$ *that satisfies*

$$\mu(X_e) = \mu(X) = 1.$$

VI. — ALGEBRAS

If B is a subspace of $C_r(X)$ or $C_c(X)$, a subset Y of X will be called a *boundary for B* if for each f in B there is some y in Y with $|f(y)| = \|f\|$.

The following lemma was announced by Bauer [2].

LEMMA 6. 1. — *If* B *is a subspace of* $C_r(X)$ *or* $C_c(X)$, M(B) *is a boundary for* B.

PROOF. — If B is a subspace of $C_c(X)$, and B_r is the subspace of $C_r(X)$ consisting of the real parts of the functions in B, then $M(B_r) = M(B)$ and also any boundary for B_r will be a boundary for B. Thus it suffices to consider the case of B a subspace of $C_r(X)$.

The subset K of B^* defined by

$$(6.\,1) \qquad K = \{L : L \in B^*, \quad L(1) = \|L\| = 1\}$$

is convex and weak* compact.

Choose any function h in B. Let L_0 be a point of K with $|L_0(h)| = \max\{|L(h)| : L \in K\}$, and $K_0 = \{L : L \in K, L(h) = L_0(h)\}$. By the Krein-Milman theorem, the compact convex set K_0 has an extreme point. This extreme point must also be an extreme point of K. By Lemma 4. 3, such an extreme point will be of the form L_y,

$$L_y(f) = f(y), \quad \text{all } f \text{ in B},$$

for some y in M(B). Since for each x in X, the L_x defined by

$$L_x(f) = f(x), \quad \text{all } f \text{ in B},$$

is in K, it follows from the choice of L_y that

$$\begin{aligned}||h|| &= \max\ \{|h(x)| : x \in X\} \\ &= \max\ \{|L_x(h)| : x \in X\} = |L_y(h)| = |h(y)|.\end{aligned}$$

Since y is a point of M(B), and h is an arbitrary function in B, M(B) is a boundary for B.

Throughout the remainder of this section, A is a *uniformly closed subalgebra* of $C_c(X)$ that distinguishes the points of X and contains the constant functions. It is well known that there is a smallest *closed* boundary for the algebra A, the Silov boundary (the Silov boundary has been related to extreme points in [1], [2] and [5]). We are concerned here with boundaries that are smaller than the Silov boundary, and in particular with the question of whether if B = A, Lemma 6. 1 is the strongest result possible; i.e., whether any boundary for A must contain the Choquet boundary of A. We show that this is indeed so if each point of X is a G_δ, while we show in the general case that any boundary for A that is a Baire set must contain the Choquet boundary of A.

In order to do this we must study two properties of points of X that are equivalent to being in M(A).

We shall say that a point x of X satisfies *Condition I* if for each open neighborhood U of X there is some f in A with $||f|| \leq 1$, $|f(x)| > \frac{3}{4}$ and $|f(y)| < \frac{1}{4}$ for all y outside of U.

We shall say that a point x of X satisfies *Condition II* if for each closed set S containing x that is a G_δ, there is some function f in A with $|f(x)| = ||f||$ and

$$\{y : |f(y)| = ||f||\} \subset S.$$

Note that if $\{x\}$ is a G_δ, Condition II simply states that there is some f in A « peaking » at x.

Lemma 6. 2. — *If x is in* M(A), *x satisfies Condition I.*

Proof. — Let A_r be the subspace of real parts of functions in A. Let U be any neighborhood of x. Choose a function g in $C_r(X)$ with $0 < g < 1$, $g(x) = 1$ and $g(y) = 0$ for y outside of U. Since $M(A) = M(A_r)$, any μ in $H_x(A_r)$ must satisfy $\hat{\mu}(\{x\}) = 1$. Thus by « 1 implies 2 » of Lemma 5. 1. applied

to $S = \{x\}$ and $B = A_r$, there is some h_0 in A_r with $h_0 \leq g$ and $h_0(x) > \frac{\log 6}{\log 8}$. Let $h = (\log 8)(h_0 - 1)$. Since h is in A_r, there is a k in A_r so that $h + ik$ is in A, and since A is a uniformly closed subalgebra, the function f defined by

$$f = e^{(h+ik)}$$

is in A (the use of the exponential function at this point was suggested to us by H. Royden). It is simple to check that f satisfies the conditions wanted; i.e. $\|f\| \leq 1$, $|f(x)| > \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, and $|f(y)| \leq \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ for y not in U.

Lemma 6. 3. — *If x satisfies Condition I, it must satisfy Condition II.*

Proof. — Let S be a closed G_δ containing x. Let $\{V_n\}$ be a decreasing sequence of open sets with $S = \bigcap V_n$. The construction of a function f in A with $|f(x)| = \|f\|$ and

$$\{y : |f(y)| = \|f\|\} \subset S$$

is identical with the construction in Theorem 2 of [4], if the sets $D_n(x)$ used in that construction are taken to be the $X - V_n$.

Lemma 6. 4. — *If x satisfies Condition II, it must be in* M(A).

Proof. — Let μ be in $H_x(A)$. Let S be any closed G_δ containing x. By Condition II there is an f in A with

$$x \in \{y : |f(y)| = \|f\|\} \subset S. \qquad (6.\ 2)$$

Since μ is in $H_x(A)$, $\int f\, d\mu = f(x)$, which by (6. 2) is possible only if $\mu(S) = 1$. Thus by the regularity of $\hat{\mu}$, $\hat{\mu}(\{x\}) = 1$, so x is in M(A).

Thus we have established.

Theorem 6. 5. — *Let x be a point of* X. *Then the following are equivalent:*

1° *x satisfies Condition I;*
2° *x satisfies Condition II;*
3° *x is in* M(A).

This equivalence for the case X *metrizable is contained in* [4].

Corollary 6. 6. — *If each point of* X *is a* G_δ, M(A) *is the smallest boundary for* A.

Proof. — By Lemma 6. 1, M(A) is a boundary for A. By Condition II, at each point x of M(A) there is some f in A with

$$|f(y)| < |f(x)|, \qquad \text{all } y \neq x.$$

Thus any boundary for A must contain M(A).

This result for X metrizable was established in [4].

Corollary 6. 7. — *Let* Y *be any Baire subset of* X *that is a boundary for* A. *Then* Y *contains* M(A).

Proof. — Suppose on the contrary that there is some point x in M(A) that is not in Y. Then there is a closed set S containing x that is a G_δ and is disjoint from Y. By Condition II there is an f in A with

$$x \in \{y : |f(y)| = \|f\|\} \subset S.$$

This f does not attain its maximum modulus on Y, contradicting the fact that Y is a boundary for A.

It is however not true that M(A) is the intersection of all of the Baire boundaries for A, as can be seen from some of the examples in the next section.

Corollary 6. 7. will now be used to show that if Y is any boundary for A, all linear functionals in A* can be represented as measures on Y. To establish this result we need first a lemma.

Lemma 6. 8. — *Let* Y *be a boundary for* A. *Let* μ *be any* A_r*-maximal measure in* H. *If* S *is a Baire set disjoint from* Y, $\mu(S) = 0$.

Proof. — Since $Y \subset X - S$, the set $X - S$ is a Baire boundary for A. By Corollary 6. 7, $M(A) \subset X - S$, so that S is disjoint from M(A). It follows from Theorem 5. 3 that $\mu(S) = 0$.

Theorem 6. 9. below now follows from Lemma 6. 8 in the same manner that Theorem 5. 5 follows from Theorem 5. 3. We omit the details.

THEOREM 6. 9. — *Let* Y *be a boundary for* A, *and* $\mathcal{S}$ *the* σ*-ring generated by* Y *and the Baire sets of* X. *Then each linear functional* L *in* A^* *has a representation of the form*

$$\text{(6. 3)} \qquad L(f) = \int f\, d\mu, \qquad \textit{all } f \textit{ in } A,$$

for μ *a measure on* $\mathcal{S}$ *that satifies* $\mu(T) = 0$ *for each* T *in* $\mathcal{S}$ *that is disjoint from* Y. *Furthermore the* μ *in* (6. 3) *can be chosen to be non-negative if and only if* $L(1) = \|L\|$.

VII. — EXAMPLES

We present in this section a class of examples showing that the Choquet boundary, which must be a G_δ in the separable case, can be arbitrarily bad in general. We also show that Theorems 5. 3 and 5. 5 cannot be strengthened to assertions about Borel sets rather than Baire sets. Finally there is a simple example which shows that the analogue of Theorem 6. 9 for subspaces rather than subalgebras is false.

Let $\{Y_x\}_{x\in X}$ be a family of disjoint non-empty topological spaces indexed by a topological space X. Let $Y = \bigcup_{x\in X} Y_x$ and $\pi : Y \to X$ be the projection map defined by $\pi(y) = x$ if y is in Y_x. Let $s : X \to Y$ be a cross-section; i.e., $\pi s(x) = x$ for all x in X.

We shall describe a topology (called the porcupine topology) for Y. Let $\mathcal{U}$ be the class of all subsets U of Y that satisfy the following : there is some x in X so that U is an open subset of Y_x not containing $s(x)$. Let $\mathcal{S}$ be the class of all subsets S of Y that satisfy the following : there is some x in Y so that S is a closed subset of Y_x not containing $s(x)$. Let $\mathcal{V}$ be the class of all subsets of Y of the form $\pi^{-1}(V) — (S_1 \cup \ldots \cup S_n)$, where V is an open subset of X and the S_i are in $\mathcal{S}$. The collection $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ is closed under intersections and thus is the basis for a topology for Y. This is our porcupine topology. In this topology a net $\{u_\alpha\}$ of points in Y converges to a point y in $Y_x — \{s(x)\}$ if and only if the net is ultimately in Y_x and converges in the original topology of Y_x to y. If none of the u_α are in Y_x, $\{u_\alpha\}$ converges to $s(x)$ if and only if the net

$\{\pi(u_\alpha)\}$ converges to x in the topology of X. If X and the Y_x are compact Hausdorff, then Y is compact Hausdorff.

Suppose now that X and the Y_x are compact Hausdorff. Let D be a subspace of $C_r(X)$ and for each x in X, let B_x be a subspace of $C_r(Y_x)$. Let B be the subspace of $C_r(Y)$ consisting of all f in $C_r(Y)$ such that $f \circ s$ is in D, and for each x in X, f restricted to Y_x is in B_x. If D and all the B_x are closed subspaces and distinguish points, B will be a closed subspace and distinguish points. It is simple to check that the Choquet boundary M(B) of B is

$$\left\{\bigcup_{x \in X} M(B_x)\right\} - S(X - M(D)). \tag{7. 1}$$

We shall now consider a special case of the above construction. Let X be an arbitrary compact Hausdorff space and K an arbitrary subset of X. For each x in K, let Y_x consist of the one point s_x, and for each x in X-K, let Y_x be the discrete topological space consisting of the three points $\{r_x, s_x, t_x\}$. Define $s : X \to Y$ by $s(x) = s_x$, all x in X. Let D be $C_r(X)$, and if x is in K, let $B_x = C_r(Y_x)$. If x is in $X - K$, let B_x be the subspace of $C_r(Y_x)$ consisting of those f that satisfy

$$f(s_x) = \frac{1}{2}(f(r_x) + f(t_x)).$$

The construction described above applied to D and the B_x yields a closed subspace B of $C_r(Y)$ that distinguishes points. Its Choquet boundary is (7. 1) and is therefore easily seen to satisfy $Y - M(B) = s(X - K)$. Since K was an arbitrary subset of X, this shows that the Choquet boundary can be arbitrarily bad. An example of a bad boundary has also been given by Choquet in [8].

Suppose now that in this example we take X to be the unit interval with the usual topology and K to be the void set. Let ν be Lebesgue measure on X, and let μ be the Baire measure on Y defined by

$$\mu(S) = \nu(s^{-1}(s(X) \cap S))$$

for all Baire subsets S of Y. Then μ is B-maximal. Nevertheless its regular Borel extension $\hat{\mu}$ satisfies $\hat{\mu}(M(B)) = 0$.

This is in contrast to Theorem 5. 3 which shows that a B-maximal measure must be « concentrated on M(B) » in the sense that $\mu(S) = 0$ for each Baire set S disjoint from M(B). The example shows that the conclusion of the theorem cannot be strengthened to $\hat{\mu}(S)$ being 0 for each Borel set S disjoint from M(B), even if M(B) itself is Borel. It also shows that the measures μ appearing in Theorem 5. 5 may not be regular.

In order to obtain a more striking example, we take X to be the subset of the complex plane

$$X = \{ z : | z | \leq 1 \}$$

in the usual topology, and take K to be the set

$$K = \{ z : | z | < 1 \}.$$

For each x in K, let Y_x consist of one point s_x and for each x in X — K, let Y_x be the discrete topological space consisting of the three points $\{ r_x, s_x,$ and $t_x \}$.

Define $s : X \to Y$ by $s(x) = s_x$, all x in X. Let D consist of all functions in $C_r(X)$ which are harmonic on K. If x is in K, let $B_x = C_r(Y_x)$.

If x is in X — K, let B_x be the subspace of $C_r(Y_x)$ consisting of those f that satisfy

$$f(s_x) = 1/2\, (f(r_x) + f(t_x)).$$

The construction above applied to D and the B_x yields a closed subspace B of $C_r(Y)$ that distinguishes points. Its Choquet boundary is easily seen by (7.1) to be

$$M(B) = Y - s(X).$$

Let y_0 be the point $s(0) = s_0$ of Y. We shall prove that

$$\hat{\mu}(M(B)) = 0$$

for all μ in $H_{y_0}(B)$.

To this end, we first note that the only compact subsets of M(B) are finite, by the definition of the topology on Y. It follows that in order to show that $\hat{\mu}(M(B)) = 0$, it will be sufficient to show that $\hat{\mu}(\{ r_x \}) = \hat{\mu}(\{ t_x \}) = 0$ for each x in X — K. Assume that this is not the case, so that

$\hat{\mu}(\{r_{x_0}\}) = C > 0$, say, for some x_0 in $X - K$. Let h be any non negative harmonic function on X with $h(x_0) > 1$ and $h(0) = C$. Define the function f in B by

$$f(y) = h(x), \text{ for all } y \text{ in } Y_x.$$

Since $\mu \in H_{y_0}$, it follows that

$$f(y_0) = \int f d\mu \geq f(r_{x_0}) \mu(\{r_{x_0}\}) = h(x_0) \hat{\mu}(\{r_{x_0}\}) > C.$$

Since also

$$f(y_0) = h(0) = C,$$

this gives a contradiction. Thus

$$\hat{\mu}(M(B)) = 0.$$

This points up Theorem 5. 5, which states that there exists μ in H_{y_0} which can be extended to a measure on the σ-ring generated by M(B) and the Baire sets so as to have $\mu(M(B)) = 1$. The point is that the extension of μ does not agree with the regular Borel extension $\hat{\mu}$ of μ.

The next example demonstrates that the analogue of Theorem 6. 9 for subspaces is false. Let X be the subset

$$\{z : |z - 1| = 1\} \cup \{z : |z + 1| = 1\}$$

of the plane. Let B be the space of all functions f on X of the form

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad (x, y) \text{ in } X,$$

for a, b and c real. Then each f in B that attains its maximum on X at $p = (1, 1)$ also attains its maximum at $(-1, 1)$, so $X - \{p\}$ is a boundary for B. However the linear functional L in B^* defined by

$$L(f) = f(p), \qquad f \text{ in } B,$$

has no representation of the form

$$L(f) = \int f d\mu, \quad f \text{ in } B,$$

for μ a non-negative measure on $X - \{p\}$.

BIBLIOGRAPHY

[1] R. Arens and I. Singer, Function values as boundary integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 5 (1954), 735-745.

[2] H. Bauer, Un problème de Dirichlet pour la frontière de Šilov d'un espace compact, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 247 (1958), pp. 843-846.

[3] E. Bishop, Some theorems concerning function algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 85 (1959), pp. 77-78.

[4] E. Bishop, A minimal boundary for function algebras, to appear in Pacific. *Jour. Math.*

[5] H. Bohnenblust and S. Karlin, Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras, *Ann. of Math.*, vol. 62 (1955), pp. 217-229.

[6] N. Bourbaki, *Integration*, *Eléments de Mathématiques*, XIII, Book VI, Paris, 1952.

[7] G. Choquet, Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 243 (1956), pp. 699-702.

[8] G. Choquet, Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, Vol. 243 (1956), 736-737.

[9] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales. *Séminaire Bourbaki*, Décembre 1956, 139-01 à 139-15.

[10] I. Glicksberg, The representation of functionals by integrals, *Duke Math. Jour.*, vol. 19 (1952), pp. 253-261.

[11] P. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, 1950.

[12] R. Kadison, A representation theory for commutative topological algebra, *Mem. Amer. Math. Soc.*, no 7.

[13] J. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, 1957.

1. The topological terminology is that of [11], and the measure theoretic terminology is that of [9].

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE DURAND
A CHARTRES
JANVIER 1960

PAPIER OFFSET BLANC VII/1
DES PAPETERIES DE FRANCE

DÉPÔT LÉGAL : 1er TRIMESTRE 1960.
N° 3487.
Printed in France